Dérivées paramétriques des fonctions de type hypergéométrique

Fonctions de Legendre, fonctions associées de Legendre,
fonctions de Gegenbauer, fonctions associées de Gegenbauer
fonctions associées généralisées de Legendre
fonctions associées généralisées de Gegenbauer
fonctions de Jacobi hypergéométriques

Fonctions de Legendre de degré quelconque : dérivées premières par rapport au degré

Il existe une formule appelée formule de Bromwich, du nom de son découvreur, portant sur la dérivée première des fonctions de Legendre de première, selon son degré lorsqu'il est entier, soit dériver formellement, selon le degré, les polynômes de Legendre :

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=n} = P_n(z)Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_n(z)$$

$$R_n(z) \textit{ appelé polynome de Bromwich de degré } n$$

Cette formule est valable uniquement pour les degrés entiers. Mais d'autres formules sont également possibles pour déterminer la dérivée paramétrique à toute valeur degré entier ou réel. Ces dernières sont d'ailleurs plus commode à utiliser pour les degrés non entiers :

$$Formule\,1 \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu} = \pi\,\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}\,P_\nu(z) - \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall\,\nu >_k 0 \in \Re\,, \nu \notin \mathbf{Z} \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$Formule\,2 \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\sum_{j=1}^{j=k}S_k^{(j)}\nu^j\sum_{r=1}^{r=k}(-1)^r S_k^{(k)}\left(\frac{j}{\nu}+\frac{r}{\nu+1}\right)(\nu+1)^r$$

$$\forall\,\nu > 0 \in \Re \quad tel\ que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\,\cdots(\alpha+k\text{-}1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

D'autres formules sont possibles (voir Radoslaw-Szmytkowski 2009 « On the derivative of the Legendre function of the first kind with respect to its degree »), notamment celle de forme la plus simple :

$$\text{Formule } 3 \Rightarrow \frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

la sommation peut partir de k = 1 également $\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z}$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$S_k^{(j)}$ *nombre de Stirling de première espèce*

Les formules (1) à (3) proviennent de la dérivation terme à terme de la représentation en série hypergéométrique de Gauss de la fonction de Legendre de première espèce :

$$P_\nu(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(k!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$\forall \nu >_k 0 \in \Re, \nu \notin \mathbf{Z}$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha)$ *fonction Gamma*

Sachant que la dérivée du symbole de Pochhammer est la suivante :

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = \frac{\Gamma'(\alpha+k)\Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha+k)\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} = \frac{\Gamma'(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = (\alpha)_k\left[\psi(\alpha+k) - \psi(\alpha)\right]$$

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

Démonstration des formules 1 et 3 :

Sachant que $P_\nu(z)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$ *tel que* $\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$

Dérivation terme à terme

$$Formule\ 3\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)+\psi(-\nu)-\psi(\nu+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+$$

$$\big(\psi(\nu+1)-\psi(-\nu)\big)-(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(k-\nu)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))P_\nu(z)$$

$$=(\psi(-\nu)-\psi(\nu+1))P_\nu(z)-\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Comme $\psi(-\nu)-\psi(\nu+1)=\pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}$ *formule de réflexion de la fonction Psi ou Digamma*

il vient la formule $(1)\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\pi\frac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}P_\nu(z)-\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k-\nu)-\psi(k+\nu+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

Par une simple manipulation on retrouve la formule (3) dans sa plus simple expression

En retravaillant la formule (3), *puisque* : $-\psi(\nu+1)+\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)=-\psi(\nu-k+1)$ *il vient*

$$Formule\ 3\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=\frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{(k!)^2}\big(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\big)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

<u>Fonctions de Legendre de degré entier : dérivées premières par rapport au degré</u>

Des formules existent également permettant de calculer plus précisément les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre de degré entiers, ainsi que les polynômes de Bromwich (voir Radosław Szmytkowski 2005, « On the derivative of the Legendre function of the first kind with respect to its degree »), à savoir :

$$\left.\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=n} = P_n(z) Log\left(\frac{z+1}{2}\right) + R_n(z)$$

$R_n(z)$ *appelé polynome de Bromwich de degré n*

Plusieurs formes pour $R_n(z)$

$$(1)\ R_n(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\left[P_k(z) - P_{k-1}(z)\right] P_{n-k}(z)$$

$$(2)\ R_n(z) = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{n+k} \frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)}\left[P_k(z) - P_n(z)\right]$$

$$(2')\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n+k-1} \frac{2k-1}{(n-k+1)(n+k)}\left[P_{k-1}(z) - P_n(z)\right]$$

$$(3)\ R_n(z) = 2\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}\left[\psi(n+k+1) - \psi(n+1)\right]\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

$$(4)\ R_n(z) = 2\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right) P_n(z) + 2\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n+k} \frac{2k+1}{(n-k)(n+k+1)} P_k(z)$$

$$(5)\ R_n(z) = 2\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}\left[\psi(n+k+1) - \psi(k+1)\right]\left(\frac{z+1}{2}\right)^k$$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Legendre, valeur au degré 0

L'expression de la dérivée à partir de laquelle on va travailler est la suivante :

$$P_\nu(z) = {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(1)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

La formule précédente n'est pas commode à utiliser lorsque les degrés sont des entiers. Elle n'est d'ailleurs pas définie car les fonctions Gamma divergent aux pôles de l'expression soit les entiers. Il se trouve que les termes de la série se présente sous une forme indéterminée lorsque le paramètre est nul, mais qu'un passage à la limite est tout de même possible et la valeur de la dérivée se simplifie comme ceci :

Partant de

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = -\lim_{\nu\to0}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{1}{k}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\right]\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\text{forme indéterminée}\quad \lim_{\nu\to0}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = \lim_{\nu\to0}\frac{-\frac{1}{\nu}}{-\frac{1}{\nu}} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = -\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad P_0(z)=1$$

$$\text{or}\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k = -\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{2}\right) \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = \mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Legendre, valeur au degré 1

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu} = \left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{\Gamma(-\nu)(k!)^2}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}$$

$$\text{or}\ \lim_{\substack{\nu\to1\\k\geq2}}\psi(\nu-k+1)=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to1}\Gamma(-\nu)=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\nu\to1\\k=1}}\Gamma(k-\nu)=\infty$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left[\left\{2\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\left(\psi(3)-\psi(1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right) - \sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)}{k(k-1)}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}\right]$$

$$\text{deux formes indéterminées}\quad \lim_{\nu\to1}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to1}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}$$

$$\Gamma(z)\underset{z\to-n}{\approx}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \Rightarrow \Gamma(-\nu)\underset{\nu\to1}{\approx}-\frac{1}{1-\nu} \qquad \Gamma(z)\underset{z\to0}{\approx}\frac{1}{z} \Rightarrow \Gamma(1-\nu)\underset{\nu\to1}{\approx}\frac{1}{1-\nu} \Rightarrow \lim_{\nu\to1}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} = -1$$

$$\psi(z)\underset{z\to-n}{\approx}-\frac{1}{n+z} \Rightarrow \psi(\nu-k+1)\underset{\nu\to1}{=}\psi(z)\underset{z\to2-k}{\approx}-\frac{1}{k-2+z}\approx-\frac{1}{\nu-1} \Rightarrow \lim_{\nu\to1}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = -1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left[\left\{-2\left(\psi(3)-\psi(1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right) + \sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)}{k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}\right]$$

Développons un peu plus le calcul :

$$\psi(3)-\psi(2)=\frac{1}{2}\quad \psi(2)-\psi(1)=1\Rightarrow \psi(3)-\psi(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1}=\left[\left\{-3\left(\frac{1-z}{2}\right)+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)}{k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{(l+3)}{(l+2)(l+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{(3+l)}{(l+1)(l+2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\left(\frac{2}{(l+1)}-\frac{1}{(l+2)}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\left(\frac{2}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}=\left\{-\frac{3}{2}(1-z)-\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\sum_{k=2}^{k=\infty}\left(\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\left\{-2\left(\frac{1-z}{2}\right)+Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{l=1}^{k=\infty}\left(\frac{2}{l}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right\}\quad \Leftarrow \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=-\left[Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\left(\frac{1-z}{2}\right)\right]$$

$$=\left\{-(1-z)+Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-(1-z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}=\left\{-(1-z)+zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1}=\left\{z-1+zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu(0)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1}=-1$$

__Formule de récurrence sur les dérivées paramétriques des polynômes de Legendre, démonstration par récurrence de la formule de Bromwich pour les polynômes de Legendre__

Revenons maintenant aux fonctions de Legendre, pour déterminer une formule de récurrence sur les dérivées paramétriques en partant de celle liant les fonctions de Legendre:

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(1+2\nu)zP_\nu(z)+\nu\, P_{\nu-1}(z)=0\quad \textit{Dérivation terme à terme}\Rightarrow$$

$$(\nu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}(z)}{\partial \nu}-(1+2\nu)z\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}+\nu\,\frac{\partial P_{\nu-1}(z)}{\partial \nu}=-P_{\nu+1}(z)+2zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)$$

Avec les termes de départ de la récurrence sur ces polynômes, on peut imaginer la forme générale des dérivées paramétriques :

$$P_{-1}(z)=0\quad P_0(z)=1\qquad (\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zP_\nu(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=0\Rightarrow P_1(z)=z$$

$$\frac{\partial P_{-1}(z)}{\partial \nu}=0\quad \frac{\partial P_0(z)}{\partial \nu}=Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$(\nu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}(z)}{\partial \nu}-(1+2\nu)z\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}+\nu\,\frac{\partial P_{\nu-1}(z)}{\partial \nu}=-P_{\nu+1}(z)+2zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\Rightarrow \left.\frac{\partial P_1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=zLog\left(\frac{1+z}{2}\right)+z$$

$$\textit{Hypothèse}\quad \left.\frac{\partial P_n(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+R_n(z)$$

$$\textit{avec}\quad (n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+\nu P_{n-1}(z)=0\quad \textit{valable}\quad \textit{pour } n\geq 1$$

$$\textit{et } P_{-1}(z)=0\quad P_0(z)=1$$

$$\textit{et } (n+1)R_{n+1}(z)-(1+2n)zR_n(z)+nR_{n-1}(z)=-P_{n+1}(z)+2zP_n(z)-P_{n-1}(z)\quad \textit{valable}\quad \textit{pour } n\geq 1$$

$$\textit{et } R_{-1}(z)=0\quad R_0(z)=0$$

.

La proposition est vraie pour les termes de départ, supposons-la vraie pour le terme n, il vient pour le terme n+1 :

$$\left.\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_n(z)$$

$$(n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (1+2n)z\frac{\partial P_n(z)}{\partial \nu} - n\frac{\partial P_{n-1}(z)}{\partial \nu} - P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (1+2n)z\left[P_n(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_n(z)\right] - n\left[P_{n-1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_{n-1}(z)\right] -$$

$$- P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$\Rightarrow (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\left[(1+2n)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)\right] + (1+2n)zR_n(z) - nR_{n-1}(z) -$$

$$- P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

$$Or \quad (1+2n)zR_n(z) - nR_{n-1}(z) - P_{n+1}(z) + 2zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)R_{n+1}(z)$$

$$et \quad (1+2n)zP_n(z) - nP_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z)$$

$$Donc \quad (n+1)\frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = (n+1)P_{n+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + (n+1)R_{n+1}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{n+1}(z)}{\partial \nu} = P_{n+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + R_{n+1}(z) \quad \textit{Ce qui démontre la récurrence.}$$

Voici un tableau des expressions successives des polynômes R dits de Bromwich :

Degré	Polynôme de Bromwich pour les fonctions de Legendre
n=0	$R_0(z) = 0$
n=1	$R_1(z) = z - 1$
n=2	$R_2(z) = \frac{1}{4}(z-1)(1+7z)$ $R_2(z) = \frac{7z^2}{4} - \frac{3z}{2} - \frac{1}{4}$
n=3	$R_3(z) = \frac{1}{12}(z-1)(-8+7z+37z^2)$ $R_3(z) = \frac{37z^3}{12} - \frac{5z^2}{2} - \frac{5z}{2} + \frac{2}{3}$
n=4	$R_4(z) = \frac{1}{96}(z-1)(-21-241\,z+113\,z^2+533\,z^3)$ $R_4(z) = \frac{533z^4}{96} - \frac{35z^3}{8} - \frac{59z^2}{16} + \frac{55z}{24} + \frac{7}{32}$
n=5	$R_5(z) = \frac{1}{480}(z-1)(256-449\,z-3389\,z^2+1101\,z^3+4881\,z^4)$ $R_5(z) = \frac{1627z^5}{160} - \frac{63z^4}{8} - \frac{499z^3}{48} + \frac{49z^2}{8} + \frac{47z}{32} - \frac{8}{15}$
n=6	$R_6(z) = \frac{1}{960}(z-1)(185+2957\,z-2728\,z^2-17008\,z^3+4247\,z^4+18107\,z^5)$ $R_6(z) = \frac{18107z^6}{960} - \frac{231z^5}{16} - \frac{1417z^4}{64} + \frac{119z^3}{8} + \frac{379z^2}{64} - \frac{231z}{80} - \frac{37}{192}$
n=7	$R_7(z) = \frac{(z-1)}{6720}(-3072+8093\,z+79409\,z^2-50476\,z^3-281476\,z^4+57191\,z^5+237371z^6)$ $R_7(z) = \frac{237371z^7}{6720} - \frac{429z^6}{16} - \frac{16127z^5}{320} + \frac{275z^4}{8} + \frac{1237z^3}{64} - \frac{849z^2}{80} - \frac{319z}{192} + \frac{16}{35}$
n=8	$R_8(z) = \frac{(z-1)}{107520}(-18655-382471\,z+524309\,z^2+4063229\,z^3-1982461\,z^4-10270741\,z^5+1760775z^6+7166175z^7)$ $R_8(z) = \frac{477745z^8}{7168} - \frac{6435z^7}{128} - \frac{429697z^6}{3840} + \frac{9867z^5}{128} + \frac{28789z^4}{512} - \frac{4213z^3}{128} - \frac{2159z^2}{256} - \frac{15159z}{4480} + \frac{533}{3072}$

On complète par un tableau des expressions successives des polynômes de Legendre :

Degré	Polynôme de Legendre
n=0	$P_0(z) = 1$
n=1	$P_1(z) = z$
n=2	$P_2(z) = \frac{1}{2}\left(-1 + 3z^2\right)$
n=3	$P_3(z) = \frac{z}{2}\left(-3 + 5z^2\right)$
n=4	$P_4(z) = \frac{1}{8}\left(3 - 30\,z^2 + 35\,z^4\right)$
n=5	$P_5(z) = \frac{z}{8}\left(15 - 70\,z^2 + 63\,z^4\right)$
n=6	$P_6(z) = \frac{1}{16}\left(-5 + 105\,z^2 - 315\,z^4 + 231\,z^6\right)$
n=7	$P_7(z) = \frac{z}{16}\left(-35 + 315\,z^2 - 693\,z^4 + 429z^6\right)$
n=8	$P_8(z) = \frac{1}{128}\left(35 - 1260\,z^2 + 6930\,z^4 - 12012\,z^6 + 6435\,z^8\right)$

Application de la formule de Bromwich au calcul des fonctions de Legendre de deuxième espèce de degré entier

Les formules de liaisons pour les fonctions Legendre de première et deuxième espèce sont les suivantes :

$$\Rightarrow Q_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)P_\nu(z)-P_\nu(-z)}{Sin(\nu\pi)}\quad \nu\notin N\rightarrow Forme\ indéterminée\ \ \frac{0}{0}\quad Lorsque\ \nu=n$$

$$Q_\nu(z)=\lim_{\nu\to n\in\mathbf{N}}\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)P_\nu(z)-P_\nu(-z)}{Sin(\nu\pi)}$$

$$Calcul\ de\ la\ limite\ par\ la\ règle\ de\ l'Hôpital\quad Q_\nu(z)=\lim_{\nu\to n\in N}\frac{\pi}{2}\frac{\dfrac{\partial\left[Cos(\nu\pi)P_\nu(z)-P_\nu(-z)\right]}{\partial\nu}}{\dfrac{\partial Sin(\nu\pi)}{\partial\nu}}$$

$$=\lim_{\nu\to n\in N}\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\pi)\dfrac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}-\pi\,Sin(\nu\pi)P_\nu(z)-\dfrac{\partial P_\nu(-z)}{\partial\nu}}{\pi\,Cos(\nu\pi)}\Rightarrow Q_n(z)=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n\dfrac{\partial P_n(z)}{\partial\nu}-\dfrac{\partial P_n(-z)}{\partial\nu}}{(-1)^n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_n(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial P_n(-z)}{\partial\nu}\right)\Rightarrow Q_0(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_0(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial P_0(-z)}{\partial\nu}\right)\qquad Q_1(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1(z)}{\partial\nu}+\frac{\partial P_1(-z)}{\partial\nu}\right)$$

En injectant la formule de Bromwich dans ce résultat il vient :

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\left(P_n(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]+R_n(z)-(-1)^nR_n(-z)\right)$$

$$R_0(z)=0\Rightarrow Q_0(z)=\frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]\quad \left.\begin{matrix}R_1(z)=z-1\\ P_1(z)=z\end{matrix}\right\}\Rightarrow Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-1$$

$$\left.\begin{matrix}R_2(z)=\dfrac{7z^2}{4}-\dfrac{3z}{2}-\dfrac{1}{4}\quad R_2(-z)=\dfrac{7z^2}{4}+\dfrac{3z}{2}-\dfrac{1}{4}\\ R_2(z)-R_2(-z)=-3z\qquad P_2(z)=\dfrac{(3z^2-1)}{2}\end{matrix}\right\}\ Q_2(z)=\frac{(3z^2-1)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{3z}{2}$$

$$\left.\begin{matrix}R_3(z)=\dfrac{37z^3}{12}-\dfrac{5z^2}{2}-\dfrac{5z}{2}+\dfrac{2}{3}\quad R_3(-z)=-\dfrac{37z^3}{12}-\dfrac{5z^2}{2}+\dfrac{5z}{2}+\dfrac{2}{3}\\ R_3(z)+R_3(-z)=-5z^2+\dfrac{4}{3}\qquad P_3(z)=\dfrac{(5z^3-3z)}{2}\end{matrix}\right\}\ Q_3(z)=\frac{z(5z^2-3)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{5z^2}{2}+\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{matrix}R_4(z)=\dfrac{533z^4}{96}-\dfrac{35z^3}{8}-\dfrac{59z^2}{16}+\dfrac{55z}{24}+\dfrac{7}{32}\quad R_4(-z)=\dfrac{533z^4}{96}+\dfrac{35z^3}{8}-\dfrac{59z^2}{16}-\dfrac{55z}{24}+\dfrac{7}{32}\\ R_4(z)-R_4(-z)=2\left(-\dfrac{35z^3}{8}+\dfrac{55z}{24}\right)\qquad P_4(z)=\dfrac{(35z^4-30z^2+3)}{8}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow Q_4(z)=\frac{(35z^4-30z^2+3)}{16}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{35z^3}{8}+\frac{55z}{24}$$

$$\left.\begin{matrix}R_5(z)=\dfrac{1627z^5}{160}-\dfrac{63z^4}{8}-\dfrac{499z^3}{48}+\dfrac{49z^2}{8}+\dfrac{47z}{32}-\dfrac{8}{15}\quad R_5(-z)=-\dfrac{1627z^5}{160}-\dfrac{63z^4}{8}+\dfrac{499z^3}{48}+\dfrac{49z^2}{8}-\dfrac{47z}{32}-\dfrac{8}{15}\\ R_5(z)+R_5(-z)=2\left(-\dfrac{63z^4}{8}+\dfrac{49z^2}{8}-\dfrac{8}{15}\right)\qquad P_5(z)=\dfrac{(63z^5-70z^3+15z)}{8}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow Q_5(z)=\frac{(63z^5-70z^3+15z)}{16}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{63z^4}{8}+\frac{49z^2}{8}-\frac{8}{15}$$

.

Tableau des fonctions de Legendre de deuxième espèce

Degré	Fonctions de Legendre $Q_n(z)=\frac{1}{2}\left(P_n(z)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]+R_n(z)-(-1)^n R_n(-z)\right)$
n=0	$Q_0(z)=\frac{1}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$
n=1	$Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-1$
n=2	$Q_2(z)=\frac{(3z^2-1)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{3z}{2}$
n=3	$Q_3(z)=\frac{z(5z^2-3)}{4}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{5z^2}{2}+\frac{2}{3}$
n=4	$Q_4(z)=\frac{(35z^4-30z^2+3)}{16}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{35z^3}{8}+\frac{55z}{24}$
n=5	$Q_5(z)=\frac{(63z^5-70z^3+15z)}{16}Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{63z^4}{8}+\frac{49z^2}{8}-\frac{8}{15}$
n=6	$Q_6(z)=\frac{1}{16}\left(-5+105z^2-315z^4+231z^6\right)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]-\frac{231z}{80}+\frac{119z^3}{8}-\frac{231z^5}{16}$
n=7	$Q_7(z)=\frac{z}{32}\left(-35+315z^2-693z^4+429z^6\right)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]+\frac{16}{35}-\frac{849z^2}{80}+\frac{275z^4}{8}-\frac{429z^6}{16}$
n=8	$Q_8(z)=\frac{1}{256}\left(35-1260z^2+6930z^4-12012z^6+6435z^8\right)Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]+\frac{15159}{4480}z-\frac{4213z^3}{128}+\frac{9867z^5}{128}-\frac{6435z^7}{128}$

Dérivées premières par rapport au degré, fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre quelconque

La principale expression de la dérivée à partir de laquelle on va travailler est la suivante :

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+1)_k}{(1-\mu)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{k!\Gamma(k+1-\mu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial\nu}=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{k!\Gamma(k+1-\mu)}\left(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

La formule précédente n'est pas commode à utiliser lorsque les degrés ou les ordres sont des entiers. Elle n'est d'ailleurs pas définie car les fonctions Gamma divergent aux pôles de l'expression soit les entiers.

La deuxième formule est uniquement valable lorsque le paramètre μ est entier :

$$P_\nu^m(z)=\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\frac{1}{\Gamma(1+m)}\ {}_2F_1\left(-\nu+m,\nu+m+1;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_\nu^m(z)=\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\frac{1}{\Gamma(1+m)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu+m)_k(\nu+m+1)_k}{(1+m)_k\,k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$Or\quad\frac{\partial}{\partial\nu}\{(-\nu+m)_k\}=(-\nu+m)_k\left(\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\right)\quad(-\nu+m)_0=1$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\{(\nu+m+1)_k\}=(\nu+m+1)_k\left(\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)\right)\quad(\nu+m+1)_0=1$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}=\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(1+m)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\{\psi(\nu+1+m)-\psi(\nu+1-m)\}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu+m)_k(\nu+m+1)_k}{(1+m)_k\,k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\\+\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu+m)_k(\nu+m+1)_k}{(1+m)_k\,k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)+\\\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(\nu+1+m)-\psi(\nu+1-m)\}P_\nu^m(z)+\\+\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(1+m)}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\nu+m)_k(\nu+m+1)_k}{(1+m)_k\,k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)+\\\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(\nu+1+m)-\psi(\nu+1-m)\}P_\nu^m(z)+\\+\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(\nu+1-m)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)\Gamma(\nu+1+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)(m+k)!k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)+\\\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

.

Levée de l'incertitude aux pôles de la fonction Gamma pour les dérivées premières par rapport au degré, pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, utilisation de la première formule

Lorsque l'ordre m est entier et inférieur ou égal à n, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\frac{1}{n!}\underset{\nu\to n}{Lim}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}\frac{\Gamma(n+1+k)}{k!}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$Si \quad m\le n$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{1}{n!}\left\{\begin{array}{l}\underset{\nu\to n}{Lim}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!}{k!}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]+\\ \underset{\nu\to n}{Lim}\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\frac{(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1))}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{1}{n!}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!}{k!}(\psi(n+1+k)-\psi(n+1-k))\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$Or \quad \underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!} \quad et \quad \underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}(\psi(n+1+k)-\psi(n+1-k))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-m)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=Max(1,m)}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!(k-m)!(n-k)!}(\psi(n+1+k)-\psi(n+1-k))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -(-1)^n\sum_{k=Max(n+1,m)}^{k=\infty}\left[\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!(k-m)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

On peut encore un peu simplifier l'expression :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=Max(1,m)}^{k=n} \left[\frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(k-m)!(n-k)!} \left(\psi(n+1+k)-\psi(n+1-k)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] - \\ -(-1)^n \sum\limits_{k=Max(n+1,m)}^{k=\infty} \left[\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!(k-m)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \end{array} \right\}$$

$$\psi(z) = \frac{dLog(\Gamma(z))}{dz} = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz} \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \psi(z+1) = \frac{dLog(z\Gamma(z))}{dz} = \frac{1}{z} + \psi(z)$$

$$\Rightarrow \psi(n+1+k) = \frac{1}{n+1+k-1} + \psi(n+1+k-1) = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \psi(n+k-1) =$$

$$= \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \cdots + \frac{1}{n+1-k} + \psi(n+1-k)$$

$$\Rightarrow \psi(n+1+k) - \psi(n+1-k) = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \cdots + \frac{1}{n+1-k} = \sum_{l=0}^{l=2k-1} \frac{1}{n+1-k+l}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=Max(1,m)}^{k=n} \left[\frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(k-m)!(n-k)!} \left\{ \sum\limits_{l=0}^{l=2k-1} \frac{1}{n+1-k+l} \right\} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] - \\ -(-1)^n \sum\limits_{k=Max(n+1,m)}^{k=\infty} \left[\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!(k-m)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \end{array} \right\}$$

Lorsque m est supérieur à n, il vient :

Si $m > n$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{n!} \sum_{k=m}^{k=\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(k+1-m)} \frac{\Gamma(n+1+k)}{k!} \underset{\nu\to n}{Lim} \frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = -\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{n!} \sum_{k=m}^{k=\infty} \left[\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{(k-m)!k!} \underset{\nu\to n}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = -\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} (-1)^n \sum_{k=m}^{k=\infty} \left[\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{(k-m)!k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = -\frac{(-1)^n}{2^m} \left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \left[\frac{(k+m+n)!(k+m-n-1)!}{(k+m)!k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

Lorsque le paramètre µ est non entier alors l'expression est encore plus simple :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{k=n} \left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left\{ \sum\limits_{l=0}^{l=2k-1} \frac{1}{n+1-k+l} \right\} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] - \\ - \sum\limits_{k=n+1}^{k=\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)} \frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \end{array} \right\}$$

<u>Levée de l'incertitude aux pôles de la fonction Gamma pour les dérivées premières par rapport au degré, pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, utilisation de la deuxième formule</u>

On rappelle les conditions n et m sont entiers, voici les deux cas : m<n, m=n :

$$\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(\nu+1+m)-\psi(\nu+1-m)\}P_\nu^m(z)+\\+\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(\nu+1-m)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)\Gamma(\nu+1+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)(m+k)!k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)+\\\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(n+1+m)-\psi(n+1-m)\}P_n^m(z)+\\+\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(n+1-m)}\underset{\nu\to n}{Lim}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(n+m+k)!}{(m+k)!k!}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)}\left\{\begin{array}{l}\psi(n+m+k+1)-\psi(n+m+1)+\\+\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

$$Si\quad n=m\quad \left.\frac{\partial P_\nu^n(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(2n+1)-\psi(1)\}P_n^n(z)+\\+\frac{(-1)^n(1-z^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2n+k)!}{k(n+k)!}\underset{\nu\to n}{Lim}\left\{\frac{\psi(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu+n)}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

$$Or\quad \underset{\nu\to n}{Lim}\left\{\frac{\psi(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu+n)}\right\}=-1\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^n(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left[\{\psi(2n+1)-\psi(1)\}P_n^n(z)-\frac{(-1)^n(1-z^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2n+k)!}{k(n+k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$Si\quad n>m\Rightarrow Comme\quad \left\{\begin{array}{l}\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)=\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\\\Rightarrow \psi(-\nu+m)-\psi(k-\nu+m)=\psi(\nu-m+1)-\psi(\nu-m-k+1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(n+1+m)-\psi(n+1-m)\}P_n^m(z)+\\+\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(n+1-m)}\underset{\nu\to n}{Lim}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(n+m+k)!}{(m+k)!k!}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)}\left\{\begin{array}{l}\psi(n+m+k+1)-\psi(n+m+1)+\\+\psi(n-m+1)-\psi(\nu-m-k+1)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]$$

.

Passons à la limite, dans le cas n>m, il vient :

$$\text{Comme}\quad \lim_{\nu\to n}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\quad \text{et}\quad \lim_{\nu\to n}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!$$

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)}=\lim_{\nu\to n-m}\frac{\Gamma(-\nu+k)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^k\frac{(n-m)!}{(n-m-k)!}$$

$$\text{Et}\quad \lim_{\nu\to n}\frac{-\psi(\nu-m-k+1)}{\Gamma(-\nu+m)}=\lim_{\nu\to n-m}\frac{-\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^{n-m}(n-m)!$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(n+1+m)-\psi(n+1-m)\}P_n^m(z)+\\ +\dfrac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(n+1-m)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-m}\frac{(n+m+k)!}{(m+k)!k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(n+m+k+1)-\\ -\psi(n+m+1)+\\ +\psi(n-m+1)-\\ -\psi(n-m-k+1)\end{array}\right\}(-1)^k\frac{(n-m)!}{(n-m-k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\\ +\displaystyle\sum_{k=n-m+1}^{k=\infty}\frac{(n+m+k)!(k-n+m-1)!}{(m+k)!k!}(-1)^{n-m}(n-m)!\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\{\psi(n+1+m)-\psi(n+1-m)\}P_n^m(z)+\\ +\dfrac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-m}\frac{(-1)^{k+m}(n+m+k)!}{(n-m-k)!(m+k)!k!}\left\{\begin{array}{l}\psi(n+1+m+k)-\\ -\psi(n+1-m-k)+\\ +\psi(n+1-m)-\\ -\psi(n+1+m)\end{array}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+\\ +(-1)^n\displaystyle\sum_{k=n-m+1}^{k=\infty}\frac{(n+m+k)!(k-n+m-1)!}{(m+k)!k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

On retrouve le cas m = n

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\{\psi(2n+1+m)-\psi(1)\}P_n^m(z)+\frac{(-1)^n(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\left\{\sum_{k=n-m+1}^{k=\infty}\frac{(2n+k)!}{k(n+k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right\}$$

.

Il ne reste plus qu'à envisager le cas m> n :

$$Si \quad m>n \quad m-n>0 \Rightarrow \underset{\nu\to n}{Lim}\, P_\nu^m(z)\equiv 0 \quad et \quad \underset{\nu\to n}{Lim}\,\psi(\nu+1+m)P_\nu^m(z)\equiv 0$$

$$\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}=\begin{bmatrix}\{\psi(\nu+1+m)-\psi(\nu+1-m)\}P_\nu^m(z)+ \\ +\dfrac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\,\Gamma(\nu+1-m)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(-\nu+m+k)\Gamma(\nu+1+m+k)}{\Gamma(-\nu+m)(m+k)!\,k!}\begin{Bmatrix}\psi(\nu+m+k+1)-\psi(\nu+m+1)+ \\ \psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{Bmatrix}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\begin{bmatrix}-\underset{\nu\to n}{Lim}\{\psi(\nu+1-m)P_\nu^m(z)\}+ \\ +\dfrac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(n+m+k)!(m+k-n-1)!}{(m+k)!\,k!\,(m-n-1)!}\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\begin{Bmatrix}\psi(n+m+k+1)-\psi(n+m+1)+ \\ +\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{Bmatrix}}{\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{bmatrix}$$

$$Comme \quad \psi(n+m+k+1),\psi(n+m+1),\psi(-n+m),\psi(-n+m+k) \quad finis$$

$$\Rightarrow \underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\begin{Bmatrix}\psi(n+m+k+1)-\psi(n+m+1)+ \\ +\psi(-\nu+m)-\psi(-\nu+m+k)\end{Bmatrix}}{\Gamma(\nu+1-m)}=0\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=-\underset{\nu\to n}{Lim}\{\psi(\nu+1-m)P_\nu^m(z)\}$$

$$Or \quad P_\nu^m(z)=\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\frac{1}{\Gamma(1+m)}\;{}_2F_1\!\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\nu\to n}{Lim}\{\psi(\nu+1-m)P_\nu^m(z)\}\equiv\frac{(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(1+m)}\;{}_2F_1\!\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)\underset{\nu\to n}{Lim}\left\{\frac{\psi(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+1-m)}\right\}$$

$$Or \quad \underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\psi(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+1-m)}=\underset{\nu\to m-n-1}{Lim}\frac{\psi(-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^{m-n}(m-n-1)!$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\underset{\nu\to n}{Lim}\{\psi(\nu+1-m)P_\nu^m(z)\}\equiv-\frac{(-1)^n(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{(n+m)!(m-n-1)!}{\Gamma(1+m)}\;{}_2F_1\!\left(-n+m,n+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

.

D'où ce résultat assez important dans le cas m>n :

$$Pour \quad m>n$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=-\frac{(-1)^n(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\frac{(n+m)!(m-n-1)!}{\Gamma(1+m)}\;{}_2F_1\!\left(-n+m,n+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, valeur au degré 0 pour l'ordre 1

Il se trouve que les termes de la série se présente sous une forme indéterminée lorsque le paramètre est nul, mais qu'un passage à la limite est tout de même possible et la valeur de la dérivée se simplifie comme ceci :

$Posons \quad \mu = 1 \quad Partant\ de$

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{\Gamma(\nu+1+k)\Gamma(k-\nu)}{k!(k-1)!\Gamma(-\nu)} (\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \underset{\nu\to 0}{Lim} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} \right] \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$forme\ indéterminée \quad \underset{\substack{\nu\to 0\\ k\geq 1}}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = \underset{\nu\to 0}{Lim} \frac{-\frac{1}{\nu}}{-\frac{1}{\nu}} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$or \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{1-z}{2} \frac{1}{1-\frac{1-z}{2}} = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \frac{1-z}{1+z} = -\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Comme \quad P_0^1(z) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = P_0^1(z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) - \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, valeur au degré 0 pour l'ordre 2

Il se trouve que les termes de la série se présente sous une forme indéterminée lorsque le paramètre est nul, mais qu'un passage à la limite est tout de même possible et la valeur de la dérivée se simplifie comme ceci :

Posons $\mu = 2$ *Partant de*

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} = \frac{(1+z)}{(1-z)} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{k!\Gamma(k+1-\mu)\Gamma(-\nu)} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu} = \frac{(1+z)}{(1-z)} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \underset{\mu\to 2}{Lim} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+1+k)}{k!\Gamma(k+1-\mu)\Gamma(-\nu)} \left(\psi(k+\nu+1) - \psi(\nu-k+1)\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)}{(1-z)} \underset{\nu\to 0}{Lim} \sum_{k=2}^{k=\infty} \left[(k-1)\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} \right] \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

forme indéterminée $\underset{\substack{\nu\to 0\\ k\geq 1}}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = \underset{\nu\to 0}{Lim} \frac{-\frac{1}{\nu}}{-\frac{1}{\nu}} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)}{(1-z)} \sum_{k=2}^{k=\infty} (k-1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k$

or $\sum_{k=2}^{k=\infty} (k-1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \left(\frac{1-z}{2}\right) \sum_{k=1}^{k=\infty} k \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \quad f(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{2}{1+z} \Rightarrow f'(z) = -\frac{2}{(1+z)^2}$

et $f'(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k \left(\frac{1-z}{2}\right)^{k-1} = -\frac{1}{1-z} \sum_{k=1}^{k=\infty} k \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{k=\infty} k \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{2(1-z)}{(1+z)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=\infty} (k-1) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)}{(1-z)} \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2} = -\frac{(1-z)}{(1+z)}$$

Comme $P_0^2(z) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = P_0^2(z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) - \frac{(1-z)}{(1+z)}$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, valeur au degré 1 pour l'ordre 1

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{\Gamma(\nu+1+k)\Gamma(k-\nu)}{k!(k-1)!\Gamma(-\nu)} (\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1)) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \underset{\nu\to 1}{Lim} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{(1+k)\Gamma(k-\nu)}{(k-1)!\Gamma(-\nu)} (\psi(k+2)-\psi(\nu-k+1)) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right]$$

$$Or\ \underset{\substack{\nu\to 1\\ k\geq 2}}{Lim}\, \psi(\nu-k+1) = \infty \quad et \quad \underset{\nu\to 1}{Lim}\, \Gamma(-\nu) = \infty \quad et \quad \underset{\substack{\nu\to 1\\ k=1}}{Lim}\, \Gamma(k-\nu) = \infty$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \left[\left\{ 2\underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} (\psi(3)-\psi(1)) \left(\frac{1-z}{2}\right) - \sum_{k=2}^{k=\infty} \left[\frac{(1+k)}{(k-1)} \underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \right\} \right]$$

$$Deux\ formes\ indéterminées \quad \underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \quad et \quad \underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}$$

$$\underset{z\to -n}{\Gamma(z)} \approx \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \Rightarrow \underset{\nu\to 1}{\Gamma(-\nu)} \approx -\frac{1}{1-\nu} \quad \underset{z\to 0}{\Gamma(z)} \approx \frac{1}{z} \Rightarrow \underset{\nu\to 1}{\Gamma(1-\nu)} \approx \frac{1}{1-\nu} \Rightarrow \underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} = -1$$

$$\underset{z\to -n}{\psi(z)} \approx -\frac{1}{n+z} \Rightarrow \underset{\nu\to 1}{\psi(\nu-k+1)} = \underset{z\to 2-k}{\psi(z)} \approx -\frac{1}{k-2+z} \approx -\frac{1}{\nu-1} \Rightarrow \underset{\nu\to 1}{Lim} \frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = -1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \left[\left\{ -2(\psi(3)-\psi(1)) \left(\frac{1-z}{2}\right) + \sum_{k=2}^{k=\infty} \left[\frac{(1+k)}{(k-1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \right\} \right]$$

Développons un peu plus le calcul :

$$\psi(3)-\psi(2) = \frac{1}{2} \quad \psi(2)-\psi(1) = 1 \Rightarrow \psi(3)-\psi(1) = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}} \left\|\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1} = \left[\left\{ -3\left(\frac{1-z}{2}\right) + \sum_{k=2}^{k=\infty} \left[\frac{(1+k)}{(k-1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \right\} \right] = \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\frac{(l+3)}{(l+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right] \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\frac{(3+l)}{(l+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right] \right\} = \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\left(1+\frac{2}{(l+1)}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right] \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \sum_{k=2}^{k=\infty} \left[\left(1+\frac{2}{k-1}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \right] \right\} = \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \sum_{k=2}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k + 2\left(\frac{1-z}{2}\right) \sum_{k=2}^{k=\infty} \left(\frac{1}{k-1}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^{k-1} \right\}$$

$$\sum_{k=2}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \frac{2}{1+z} \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 = \frac{(1-z)^2}{2(1+z)} \qquad \left.\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = -Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$= \left\{ -\frac{3}{2}(1-z) + \frac{(1-z)^2}{2(1+z)} + (1-z) \sum_{l=1}^{k=\infty} \left(\frac{1}{l}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^l \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(1-z)}{2} \left\{ \frac{(1-z)}{(1+z)} - 3 \right\} - (1-z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \right\} = \left\{ -\frac{(1-z)}{(1+z)} (1+2z) - (1-z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -\frac{(1-z)}{(1+z)} (1+2z) - (1-z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \right\} \Rightarrow \left\|\frac{\partial P_\nu^1(0)}{\partial \nu}\right\|_{\nu=1} = -1$$

On vérifie que la dérivée paramétrique possède une forme particulière :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right\|_{\nu=1}=\left\{-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}(1+2z)-(1-z^2)^{\frac{1}{2}}Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\right\}$$

$$Or\quad P_\nu^1(z)=-(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right\|_{\nu=1}=P_\nu^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}(1+2z)$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions de Legendre associées de degré et d'ordre entier, valeur au degré 2 pour l'ordre 1

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(\nu+1+k)\Gamma(k-\nu)}{k!(k-1)!\Gamma(-\nu)}(\psi(k+\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}\underset{\nu\to2}{Lim}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)(2+k)\Gamma(k-\nu)}{(k-1)!\Gamma(-\nu)}(\psi(k+3)-\psi(\nu-k+1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$Or\ \underset{\substack{\nu\to2\\k\geq3}}{Lim}\psi(\nu-k+1)=\infty\quad et\quad\underset{\nu\to2}{Lim}\,\Gamma(-\nu)=\infty\quad et\quad\underset{\substack{\nu\to2\\k=1,2}}{Lim}\,\Gamma(k-\nu)=\infty$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}\left[\left\{\begin{array}{l}6\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}(\psi(4)-\psi(2))\left(\frac{1-z}{2}\right)+12\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(-\nu)}(\psi(5)-\psi(1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\\-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)(2+k)}{(k-1)(k-2)}\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}\right]$$

$$Trois\ \ formes\ indéterminées\quad\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\quad et\quad\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\quad et\quad\underset{\substack{\nu\to2\\k\geq3}}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}$$

$$\underset{z\to-n}{\Gamma(z)}\approx\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\Leftrightarrow\underset{z\to n}{\Gamma(-z)}\approx\frac{(-1)^n}{n!(n-z)}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{\Gamma(-\nu)}\approx\frac{1}{2(2-\nu)}\quad\underset{z\to0}{\Gamma(z)}\approx\frac{1}{z}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{\Gamma(2-\nu)}\approx\frac{1}{2-\nu}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=2$$

$$\underset{\nu\to2}{\Gamma(1-\nu)}=\underset{z\to-1}{\Gamma(z)}=\underset{z\to1}{\Gamma(-z)}\approx-\frac{1}{2-\nu}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=-\frac{1}{2-\nu}2(2-\nu)=-2$$

$$\underset{z\to-n}{\psi(z)}\approx-\frac{1}{n+z}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{\psi(\nu-k+1)}=\underset{z\to3-k}{\psi(z)}\approx-\frac{1}{k-3+z}\approx-\frac{1}{\nu-2}\Rightarrow\underset{\nu\to2}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=2$$

$$De\ plus\ \ \underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!\quad\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=-n\quad\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=n(n-1)$$

$$\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(p-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^p\frac{n!}{(n-p)!}\quad\underset{\nu\to n}{Lim}\frac{\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}\left[\left\{-12(\psi(4)-\psi(2))\left(\frac{1-z}{2}\right)+24(\psi(5)-\psi(1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-2\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)(2+k)}{(k-1)(k-2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}\right]$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\left\{-6(\psi(4)-\psi(2))\left(\frac{1-z}{2}\right)+12(\psi(5)-\psi(1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{(1+k)(2+k)}{(k-1)(k-2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}$$

Développons un peu plus le calcul :

$$\psi(4)-\psi(2)=\frac{5}{6} \qquad \psi(5)-\psi(1)=\frac{25}{12} \qquad \frac{(1+k)(2+k)}{(k-1)(k-2)}=1+\frac{12}{(k-2)}-\frac{6}{(k-1)}$$

$$\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=-5\left(\frac{1-z}{2}\right)+25\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left\{1+\frac{12}{(k-2)}-\frac{6}{(k-1)}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$=-5\left(\frac{1-z}{2}\right)+25\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k-12\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{1}{(k-2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k+6\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=3}^{k=\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=\frac{2}{1+z}\left(\frac{1-z}{2}\right)^3=\frac{(1-z)^3}{4(1+z)} \qquad \sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l=-Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{1}{(k-2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l=-\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=\left(\frac{1-z}{2}\right)\sum_{l=2}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l=\left(\frac{1-z}{2}\right)\left(-\left(\frac{1-z}{2}\right)+\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right)=-\left(\frac{1-z}{2}\right)\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)+Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=-5\left(\frac{1-z}{2}\right)+19\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-\frac{(1-z)^3}{4(1+z)}-3z(1-z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=\frac{(1-z)}{(1+z)}\left(2-2z-5z^2\right)-3z(1-z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1-z)}{(1+z)}\left(2-2z-5z^2\right)-3z\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \qquad Or \;\; P_\nu^1(z)=-3z\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=P_\nu^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\left(2-2z-5z^2\right)=P_\nu^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\left(-2+2z+5z^2\right)$$

<u>Résumons les résultats obtenus pour les divers calculs effectués :</u>

$$\frac{\partial P_\nu^0(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0}=P_0^0(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \qquad P_0^0(z)=1$$

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0}=P_0^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}} \qquad P_0^1(z)=0$$

$$\frac{\partial P_\nu^2(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0}=P_0^2(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)}{(1+z)} \qquad P_0^2(z)=0$$

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg\|_{\nu=1}=P_1^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}(1+2z) \qquad P_1^1(z)=-\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}=-(1+z)\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial P_\nu^1(z)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=2}=P_2^1(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)-\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}\left(-2+2z+5z^2\right) \qquad P_2^1(z)=-3z\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}=-3z(1+z)\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}$$

Hypothèse de récurrence sur les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées, de degrés et d'ordre entiers

On va faire l'hypothèse que les dérivées paramétriques ont la forme suivante :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z)$$

.

Loi de récurrence sur les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées sur les degrés

La loi de récurrence sur les degrés des fonctions de Legendre associées s'écrit :

$$(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) - (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z) = 0$$

En dérivant terme à terme cette relation, on peut établir une relation de récurrence suivant les degrés sur les dérivées paramétriques :

$$(\nu-\mu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}^\mu(z)}{\partial \nu} - (2\nu+1)z\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} + (\nu+\mu)\frac{\partial P_{\nu-1}^\mu(z)}{\partial \nu} + P_{\nu+1}^\mu(z) - 2zP_\nu^\mu(z) + P_{\nu-1}^\mu(z) = 0$$

$$\Rightarrow \nu = n \quad \mu = m \quad \frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} = \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}$$

$$\Rightarrow (n-m+1)\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n+1} - (2n+1)z\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} + (n+m)\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n-1} + P_{n+1}^m(z) - 2zP_n^m(z) + P_{n-1}^m(z) = 0$$

Loi de récurrence sur les fonctions R : application de l'hypothèse de récurrence

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z) \quad P_n^m(z) = (-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} = \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}(-1)^m(1+z)^m \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}$$

$$Posons \quad \widetilde{P}_n^m(z) = (-1)^m(1+z)^m \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \Rightarrow P_n^m(z) = \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} \widetilde{P}_n^m(z) \quad \widetilde{P}_n^m(z) \quad polynôme$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Terme\ en\ Log\left(\frac{1+z}{2}\right) \rightarrow (n-m+1)P_{n+1}^m(z) - (2n+1)zP_n^m(z) + (n+m)P_{n-1}^m(z) = 0 \\ \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\left\{(n-m+1)R_{n+1}^m(z) - (2n+1)zR_n^m(z) + (n+m)R_{n-1}^m(z) + \left[\widetilde{P}_{n+1}^m(z) - 2z\widetilde{P}_n^m(z) + \widetilde{P}_{n-1}^m(z)\right]\right\} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n-m+1)P_{n+1}^m(z) - (2n+1)zP_n^m(z) + (n+m)P_{n-1}^m(z) = 0 \\ (n-m+1)R_{n+1}^m(z) - (2n+1)zR_n^m(z) + (n+m)R_{n-1}^m(z) + \widetilde{P}_{n+1}^m(z) - 2z\widetilde{P}_n^m(z) + \widetilde{P}_{n-1}^m(z) = 0 \end{cases}$$

.

Vérifions si la loi de récurrence sur les fonctions R est bien vérifiée sur les trois calculs précédents (degrés 0,1 et 2) :

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$\Rightarrow R_2^1(z) - 3zR_1^1(z) + 2R_0^1(z) + \widetilde{P}_2^1(z) - 2z\widetilde{P}_1^1(z) + \widetilde{P}_0^1(z) = 0$$

$$Or \quad \begin{cases} R_0^1(z) = -1 \quad R_1^1(z) = -(1+2z) \quad R_2^1(z) = -(-2+2z+5z^2) \\ \widetilde{P}_0^1(z) = 0 \quad \widetilde{P}_1^1(z) = -(1+z) \quad \widetilde{P}_2^1(z) = -3z(1+z) \end{cases}$$

$$R_2^1(z) - 3zR_1^1(z) + 2R_0^1(z) + \widetilde{P}_2^1(z) - 2z\widetilde{P}_1^1(z) + \widetilde{P}_0^1(z) =$$
$$= -(-2+2z+5z^2) + 3z(1+2z) - 2 + \{-3z(1+z) + 2z(1+z)\}$$
$$= -2z + 3z - z = 0$$

La relation de récurrence est donc vérifiée sur les degrés pour l'ordre m=1, pour les trois premiers degrés.

<u>Loi de récurrence sur les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées sur les ordres</u>

La loi de récurrence sur les ordres des fonctions de Legendre associées s'écrit :

$$P_\nu^{\mu+2}(z) + \frac{2(1+\mu)z}{\sqrt{1-z^2}} P_\nu^{\mu+1}(z) + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P_\nu^\mu(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_\nu^{\mu+2}(z) + \frac{2(1+\mu)z}{\sqrt{1-z^2}} P_\nu^{\mu+1}(z) + (\nu(1+\nu) - \mu(1+\mu))P_\nu^\mu(z) = 0$$

En dérivant terme à terme cette relation, on peut établir une relation de récurrence suivant les ordres sur les dérivées paramétriques :

$$\frac{\partial P_\nu^{\mu+2}(z)}{\partial \nu} + \frac{2(1+\mu)z}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial P_\nu^{\mu+1}(z)}{\partial \nu} + (\nu(1+\nu) - \mu(1+\mu))\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} + (2\nu+1)P_\nu^\mu(z) = 0$$

$$\Rightarrow \nu = n \quad \mu = m \quad \frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu} = \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{m+2}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} + \frac{2(1+m)z}{\sqrt{1-z^2}} \left.\frac{\partial P_\nu^{m+1}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} + (n(1+n) - m(1+m))\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} + (2n+1)P_n^m(z) = 0$$

Si maintenant on fait l'hypothèse que la dérivée paramétrique revêt la forme suivante :

$$\left.\frac{\partial P_v^m(z)}{\partial v}\right|_{v=n} = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)$$

$$\left.\frac{\partial P_v^{m+2}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+\frac{2(1+m)z}{\sqrt{1-z^2}}\left.\frac{\partial P_v^{m+1}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+(n(1+n)-m(1+m))\left.\frac{\partial P_v^m(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+(2n+1)P_n^m(z)=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} P_n^{m+2}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m+2}{2}}}{(1+z)^{\frac{m+2}{2}}}R_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}\left(P_n^{m+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m+1}{2}}}{(1+z)^{\frac{m+1}{2}}}R_n^{m+1}(z)\right) \\ +(n(1+n)-m(1+m))\left\{P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)\right\}+(2n+1)P_n^m(z)\end{array}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\left[P_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{\sqrt{1-z^2}}P_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))P_n^m(z)\right]=0 \\ \frac{(1-z)^{\frac{m+2}{2}}}{(1+z)^{\frac{m+2}{2}}}R_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}\frac{(1-z)^{\frac{m+1}{2}}}{(1+z)^{\frac{m+1}{2}}}R_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)+ \\ +(2n+1)\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\widetilde{P}_n^m(z)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \frac{(1-z)}{(1+z)}\widetilde{P}_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{(1+z)}\widetilde{P}_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))\widetilde{P}_n^m(z)=0 \\ \frac{(1-z)}{(1+z)}R_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{(1+z)}R_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))R_n^m(z)+(2n+1)\widetilde{P}_n^m(z)=0 \end{cases}$$

Vérifions si la loi de récurrence sur les fonctions R est bien vérifiée sur les trois calculs précédents (ordre 0, 1 et 2) :

$$\begin{cases} \frac{(1-z)}{(1+z)}\widetilde{P}_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{(1+z)}\widetilde{P}_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))\widetilde{P}_n^m(z)=0 \\ \frac{(1-z)}{(1+z)}R_n^{m+2}(z)+\frac{2(1+m)z}{(1+z)}R_n^{m+1}(z)+(n(1+n)-m(1+m))R_n^m(z)+(2n+1)\widetilde{P}_n^m(z)=0 \end{cases}$$

$m=0 \quad n=0$

$\widetilde{P}_0^2(z)=\widetilde{P}_0^1(z)=0 \quad \widetilde{P}_0^0(z)=1$ *la première relation de recurrence est vérifiée*

$R_0^2(z)=-1 \quad R_0^1(z)=-1 \quad R_0^0(z)=0$

$\Rightarrow -\frac{(1-z)}{(1+z)}-\frac{2z}{(1+z)}+1=\frac{z-1}{(1+z)}-\frac{2z}{(1+z)}+\frac{1+z}{(1+z)}=0$ *la deuxième relation de recurrence est vérifiée*

.

La relation de récurrence est donc vérifiée sur les degrés pour le degré n=0, pour les trois premiers ordres m=0,1,2.

Loi de récurrence mixte sur les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées sur les degrés et les ordres

Il existe également des lois de récurrence mixte sur les ordres et les degrés des fonctions de Legendre associées qui s'écrivent :

$$(1)\quad \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)-(\nu-\mu)zP_\nu^{\mu}(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0$$

$$(2)\quad \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)+(\nu+1+\mu)zP_\nu^{\mu}(z)-(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)=0$$

La deuxième identité se déduit de la première et de la relation de récurrence sur les degrés. En dérivant terme à terme ces relations, on peut établir une relation de récurrence suivant les ordres sur les dérivées paramétriques :

$$(1)\quad \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)-(\nu-\mu)zP_\nu^{\mu}(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,P_{\nu+1}^{\mu+1}(z)-(\nu+1-\mu)zP_{\nu+1}^{\mu}(z)+(\nu+1+\mu)P_\nu^{\mu}(z)=0$$

$$De\ plus\quad \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)zP_\nu^{\mu}(z)-(2\nu+1)zP_\nu^{\mu}(z)+(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)=0$$

$$\Rightarrow (2)\quad \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)+(\nu+\mu+1)zP_\nu^{\mu}(z)-(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)=0$$

$$(1)\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,\frac{\partial P_\nu^{\mu+1}(z)}{\partial\nu}-(\nu-\mu)z\frac{\partial P_\nu^{\mu}(z)}{\partial\nu}+(\nu+\mu)\frac{\partial P_{\nu-1}^{\mu}(z)}{\partial\nu}-zP_\nu^{\mu}(z)+P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0$$

$$(2)\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,\frac{\partial P_\nu^{\mu+1}(z)}{\partial\nu}+(\nu+\mu+1)z\frac{\partial P_\nu^{\mu}(z)}{\partial\nu}-(\nu-\mu+1)\frac{\partial P_{\nu+1}^{\mu}(z)}{\partial\nu}+zP_\nu^{\mu}(z)-P_{\nu+1}^{\mu}(z)=0$$

En injectant la forme de la dérivée paramétrique dans la relation (1), il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)$$

$$(1)\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,\frac{\partial P_\nu^{m+1}(z)}{\partial\nu}-(n-m)z\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}+(n+m)\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n-1}-zP_n^m(z)+P_{n-1}^m(z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-z^2}\,P_n^{m+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m+2}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^{m+1}(z)-(n-m)z\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)\right)\\ +(n+m)\left\{P_{n-1}^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_{n-1}^m(z)\right\}-zP_n^m(z)+P_{n-1}^m(z)\end{array}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}Log\left(\frac{1+z}{2}\right)\left[\sqrt{1-z^2}\,P_n^{m+1}(z)-(n-m)zP_n^m(z)+(n+m)P_{n-1}^m(z)\right]=0\\ (1-z)R_n^{m+1}(z)-(n-m)zR_n^m(z)+(n+m)R_{n-1}^m(z)-z\widetilde{P}_n^m(z)+\widetilde{P}_{n-1}^m(z)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_n^{m+1}(z)-(n-m)z\widetilde{P}_n^m(z)+(n+m)\widetilde{P}_{n-1}^m(z)=0\\ (1-z)R_n^{m+1}(z)-(n-m)zR_n^m(z)+(n+m)R_{n-1}^m(z)-z\widetilde{P}_n^m(z)+\widetilde{P}_{n-1}^m(z)=0\end{cases}$$

En injectant la forme de la dérivée paramétrique dans la relation (2), il vient :

$$\left.\frac{\partial P_v^m(z)}{\partial v}\right|_{v=n} = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)$$

$$(1)\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\left.\frac{\partial P_v^{m+1}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+(v+\mu+1)z\left.\frac{\partial P_v^m(z)}{\partial v}\right|_{v=n}-(v-\mu+1)\left.\frac{\partial P_v^m(z)}{\partial v}\right|_{v=n+1}+zP_n^\mu(z)-P_{n+1}^\mu(z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-z^2}P_n^{m+1}(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m+2}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^{m+1}(z)+(n+m+1)z\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)\right)\\ -(n-m+1)\left\{P_{n+1}^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_{n+1}^m(z)\right\}+zP_n^m(z)-P_{n+1}^m(z)\end{array}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_n^{m+1}(z)+(n+m+1)z\widetilde{P}_n^m(z)-(n-m+1)\widetilde{P}_{n+1}^m(z)=0\\(1-z)R_n^{m+1}(z)+(n+m+1)zR_n^m(z)-(n-m+1)R_{n+1}^m(z)+z\widetilde{P}_n^m(z)-\widetilde{P}_{n+1}^m(z)=0\end{cases}$$

Vérifions si ces deux lois de récurrence sur les fonctions R est bien vérifiée sur les calculs précédents :

$$\widetilde{P}_0^2(z)=\widetilde{P}_0^1(z)=0 \quad \widetilde{P}_0^0(z)=1 \quad \widetilde{P}_1^0(z)=z \quad \widetilde{P}_2^0(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1)$$

$$\widetilde{P}_0^1(z)=0 \quad \widetilde{P}_1^1(z)=-(1+z) \quad \widetilde{P}_2^1(z)=-3z(1+z)$$

$$R_0^2(z)=-1 \quad R_0^1(z)=-1 \quad R_0^0(z)=0 \quad R_1^0(z)=z-1 \quad R_2^0(z)=\frac{1}{4}(z-1)(1+7z)$$

$$R_0^1(z)=-1 \quad R_1^1(z)=-(1+2z) \quad R_2^1(z)=-(-2+2z+5z^2)$$

$$(1)\quad \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_n^{m+1}(z)-(n-m)z\widetilde{P}_n^m(z)+(n+m)\widetilde{P}_{n-1}^m(z)=0\\(1-z)R_n^{m+1}(z)-(n-m)zR_n^m(z)+(n+m)R_{n-1}^m(z)-z\widetilde{P}_n^m(z)+\widetilde{P}_{n-1}^m(z)=0\end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_n^{m+1}(z)+(n+m+1)z\widetilde{P}_n^m(z)-(n-m+1)\widetilde{P}_{n+1}^m(z)=0\\(1-z)R_n^{m+1}(z)+(n+m+1)zR_n^m(z)-(n-m+1)R_{n+1}^m(z)+z\widetilde{P}_n^m(z)-\widetilde{P}_{n+1}^m(z)=0\end{cases}$$

$$(1)\quad n=1,m=0\Rightarrow \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_1^1(z)-z\widetilde{P}_1^0(z)+\widetilde{P}_0^0(z)=-(1-z^2)-z^2+1=0\\(1-z)R_1^1(z)-zR_1^0(z)+R_0^0(z)-z\widetilde{P}_1^0(z)+\widetilde{P}_0^0(z)=(z-1)(1+2z)-z(z-1)-z^2+1\\(z-1)(1+z)-z^2+1=0\end{cases}$$

$$(2)\quad n=1,m=0\Rightarrow \begin{cases}(1-z)\widetilde{P}_1^1(z)+2z\widetilde{P}_1^0(z)-2\widetilde{P}_2^0(z)=-(1-z)(1+z)+2z^2-(3z^2-1)=0\\(1-z)R_1^1(z)+2zR_1^0(z)-2R_2^0(z)+z\widetilde{P}_1^0(z)-\widetilde{P}_2^0(z)=\\=(1+2z)(z-1)+2z(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)(1+7z)+z^2-\frac{1}{2}(3z^2-1)\\=(z-1)\left(\frac{2+8z}{2}-\frac{1+7z}{2}\right)+\frac{1}{2}(2z^2-3z^2+1)=\\=(z-1)\left(\frac{1+z}{2}\right)+\frac{1}{2}(1-z^2)=0\end{cases}$$

.

Les deux relations de récurrence sont donc vérifiées.

__Expression exacte des polynômes de Bromwich liées aux fonctions de Legendre associées sur les degrés__

Partant de l'expression : $\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + B_n^m(z) = P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z)$

Il est possible de construire la formule exacte des fonctions de Bromwich, qui s'avère être effectivement des polynômes.

$$B_n^m(z) = \left\{\begin{array}{l} -(-1)^n\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(n+k)!(m-k-1)!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^k + \\ +(-1)^n\left(\frac{1-z^2}{4}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{k=n-m} (-1)^k \frac{(k+n+m)!}{k!(k+m)!(n-m-k)!}\left[2\psi(k+n+m+1)-\psi(k+m+1)-\psi(k+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^k \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow B_n^m(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}} \left\{\begin{array}{l} -(-1)^n \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(n+k)!(m-k-1)!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^k + \\ +(-1)^n \sum_{k=0}^{k=n-m} (-1)^k \frac{(k+n+m)!}{k!(k+m)!(n-m-k)!}\left[2\psi(k+n+m+1)-\psi(k+m+1)-\psi(k+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^{k+m} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow R_n^m(z) = \left\{\begin{array}{l} -(-1)^n \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(n+k)!(m-k-1)!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^k + \\ +(-1)^n \sum_{k=0}^{k=n-m} (-1)^k \frac{(k+m+n)!}{k!(k+m)!(n-m-k)!}\left[2\psi(k+m+n+1)-\psi(k+m+1)-\psi(k+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^{k+m} \end{array}\right\}$$

En posant $l = k+m \Leftrightarrow k = l-m$

$$\Rightarrow R_n^m(z) = (-1)^n\left\{-\sum_{l=0}^{l=m-1} \frac{(n+l)!(m-l-1)!}{l!(n-l)!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l + \sum_{l=m}^{l=n} \frac{(-1)^{l+m}(n+l)!}{l!(l-m)!(n-l)!}\left[2\psi(l+n+1)-\psi(l+1)-\psi(1+l-m)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\right\}$$

Plus précisément

$$R_n^m(z) = \left\{\begin{array}{l} 2\sum_{l=0}^{l=n} \frac{(-1)^{l+n}(n+l)!}{(l!)^2(n-l)!}\left[\psi(l+n+1)-\psi(l+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^l \quad si\ m=0 \\ (-1)^n\left\{-\sum_{l=0}^{l=m-1} \frac{(n+l)!(m-l-1)!}{l!(n-l)!}\left(\frac{1+z}{2}\right)^l + \sum_{l=m}^{l=n} \frac{(-1)^{l+m}(n+l)!}{l!(l-m)!(n-l)!}\left[2\psi(l+n+1)-\psi(l+1)-\psi(1+l-m)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^l\right\} \\ pour \quad m \geq 1 \end{array}\right.$$

On retrouve l'expression des polynômes de Bromwich dans le cas des fonctions de Legendre, m=0 :

$$m=0 \Rightarrow R_n^0(z) = 2\sum_{l=0}^{l=n} \frac{(-1)^{l+n}(n+l)!}{(l!)^2(n-l)!}\left[\psi(l+n+1)-\psi(l+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^l$$

Ce qui est exactement la formule donnée précédemment.

$$R_n(z) = 2\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left[\psi(n+k+1)-\psi(k+1)\right]\left(\frac{1+z}{2}\right)^k$$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

Voici des tableaux des expressions successives des polynômes R dits de Bromwich :

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich pour les fonctions de Legendre associées*
n=0, m=1	$R_0^1(z) = -1$
n=1, m=1	$R_1^1(z) = -1 - 2z$
n=2, m=1	$R_2^1(z) = 2 - 2z - 5z^2$
n=3, m=1	$R_3^1(z) = \frac{5}{4} + \frac{31z}{4} - \frac{17z^2}{4} - \frac{47z^3}{4}$
n=4, m=1	$R_4^1(z) = -\frac{8}{3} + \frac{61z}{12} + \frac{97z^2}{4} - \frac{109z^3}{12} - \frac{319z^4}{12}$
n=5, m=1	$R_5^1(z) = -\frac{47}{32} - \frac{499z}{32} + \frac{253z^2}{16} + \frac{1093z^3}{16} - \frac{619z^4}{32} - \frac{1879z^5}{32}$
n=6, m=1	$R_6^1(z) = \frac{16}{5} - \frac{1433z}{160} - \frac{2017z^2}{32} + \frac{703z^3}{16} + \frac{2887z^4}{16} - \frac{6557z^5}{160} - \frac{20417z^6}{160}$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich pour les fonctions de Legendre associées*
n=0, m=2	$R_0^2(z) = -1$
n=1, m=2	$R_1^2(z) = 2 + z$
n=2, m=2	$R_2^2(z) = 4 + 13z + 8z^2$
n=3, m=2	$R_3^2(z) = -8 + 7z + 47z^2 + 31z^3$
n=4, m=2	$R_4^2(z) = -\frac{31}{4} - 56z - \frac{9z^2}{2} + 142z^3 + \frac{389z^4}{4}$
n=5, m=2	$R_5^2(z) = 16 - \frac{119z}{4} - 247z^2 - \frac{171z^3}{2} + 391z^4 + \frac{1097z^5}{4}$
n=6, m=2	$R_6^2(z) = \frac{389}{32} + \frac{2227z}{16} - \frac{1781z^2}{32} - \frac{7107z^3}{8} - \frac{13285z^4}{32} + \frac{16259z^5}{16} + \frac{23189z^6}{32}$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich pour les fonctions de Legendre associées*
n=0, m=3	$R_0^3(z) = -2$
n=1, m=3	$R_1^3(z) = 3 + z$
n=2, m=3	$R_2^3(z) = -8 - 9z - 3z^2$
n=3, m=3	$R_3^3(z) = -23 - 102z - 123z^2 - 46z^3$
n=4, m=3	$R_4^3(z) = 48 - 32z - 471z^2 - 636z^3 - 247z^4$
n=5, m=3	$R_5^3(z) = \frac{247}{4} + \frac{2067z}{4} + \frac{723z^2}{2} - \frac{3167z^3}{2} - \frac{9873z^4}{4} - \frac{3921z^5}{4}$
n=6, m=3	$R_6^3(z) = -128 + \frac{897z}{4} + \frac{11553z^2}{4} + \frac{6043z^3}{2} - \frac{8895z^4}{2} - \frac{33051z^5}{4} - \frac{13327z^6}{4}$

Voici des tableaux des expressions successives des polynômes dits de Legendre associés, soit :

$$P_n^m(z)=\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}\widetilde{P}_n^m(z)\Leftrightarrow\widetilde{P}_n^m(z)=\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}P_n^m(z)=(-1)^m(1+z)^m\frac{d^mP_n(z)}{dz^m}.$$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées*
n=0, m=1	$\widetilde{P}_0^1(z)=0$
n=1, m=1	$\widetilde{P}_1^1(z)=-1-z$
n=2, m=1	$\widetilde{P}_2^1(z)=-3z-3z^2$
n=3, m=1	$\widetilde{P}_3^1(z)=\frac{3}{2}+\frac{3z}{2}-\frac{15z^2}{2}-\frac{15z^3}{2}$
n=4, m=1	$\widetilde{P}_4^1(z)=\frac{15z}{2}+\frac{15z^2}{2}-\frac{35z^3}{2}-\frac{35z^4}{2}$
n=5, m=1	$\widetilde{P}_5^1(z)=-\frac{15}{8}-\frac{15z}{8}+\frac{105z^2}{4}+\frac{105z^3}{4}-\frac{315z^4}{8}-\frac{315z^5}{8}$
n=6, m=1	$\widetilde{P}_6^1(z)=-\frac{105z}{8}-\frac{105z^2}{8}+\frac{315z^3}{4}+\frac{315z^4}{4}-\frac{693z^5}{8}-\frac{693z^6}{8}$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées*
n=0, m=2	$\widetilde{P}_0^2(z)=0$
n=1, m=2	$P_1^2(z)=0$
n=2, m=2	$\widetilde{P}_2^2(z)=3+6z+3z^2$
n=3, m=2	$\widetilde{P}_3^2(z)=15z+30z^2+15z^3$
n=4, m=2	$\widetilde{P}_4^2(z)=-\frac{15}{2}-15z+45z^2+105z^3+\frac{105z^4}{2}$
n=5, m=2	$\widetilde{P}_5^2(z)=-\frac{105z}{2}-105z^2+105z^3+315z^4+\frac{315z^5}{2}$
n=6, m=2	$\widetilde{P}_6^2(z)=\frac{105}{8}+\frac{105z}{4}-\frac{1785z^2}{8}-\frac{945z^3}{2}+\frac{1575z^4}{8}+\frac{3465z^5}{4}+\frac{3465z^6}{8}$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées*
n=0, m=3	$\widetilde{P}_0^3(z)=0$
n=1, m=3	$\widetilde{P}_1^3(z)=0$
n=2, m=3	$\widetilde{P}_2^3(z)=0$
n=3, m=3	$\widetilde{P}_3^3(z)=-15-45z-45z^2-15z^3$
n=4, m=3	$\widetilde{P}_4^3(z)=-105z-315z^2-315z^3-105z^4$
n=5, m=3	$\widetilde{P}_5^3(z)=\frac{105}{2}+\frac{315z}{2}-315z^2-1365z^3-\frac{2835z^4}{2}-\frac{945z^5}{2}$
n=6, m=3	$\widetilde{P}_6^3(z)=\frac{945z}{2}+\frac{2835z^2}{2}-315z^3-4725z^4-\frac{10395z^5}{2}-\frac{3465z^6}{2}$

Application de la formule de Bromwich au calcul des fonctions de Legendre associées de deuxième espèce de degré et d'ordre entier (fonctions dîtes « On the Cut » ou encore fonctions de Ferrer

Les formules de liaisons pour les fonctions Legendre de première et deuxième espèce sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} Sin((\nu+\mu)\pi) P_\nu^\mu(z) = -\{Cos((\nu+\mu)\pi) Q_\nu^\mu(z) + Cos(\mu\pi) Q_\nu^\mu(-z)\} \\ \frac{2}{\pi} Q_\nu^\mu(z) Sin((\nu+\mu)\pi) = Cos((\nu+\mu)\pi) P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z) \Rightarrow \nu,\mu = m \text{ entiers} \quad P_\nu^\mu(-z) = (-1)^{\nu+\mu} P_\nu^\mu(z) \end{cases}$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{Cos((\nu+\mu)\pi) P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \quad \nu,\mu \notin \mathbf{N} \to \text{Forme indéterminée } \frac{0}{0} \quad \text{Lorsque } \nu,\mu = m \text{ entiers}$$

$$Q_n^m(z) = \lim_{\substack{\nu\to n\in\mathbf{N} \\ \mu\to m\in\mathbf{N}}} \frac{\pi}{2} \frac{Cos((\nu+m)\pi) P_\nu^m(z) - P_\nu^m(-z)}{Sin((\nu+m)\pi)}$$

$$\text{Calcul de la limite par la règle de l'Hôpital} \quad Q_n^m(z) = \lim_{\substack{\nu\to n\in\mathbf{N} \\ \mu\to m\in\mathbf{N}}} \frac{\pi}{2} \frac{\dfrac{\partial\left[Cos((\nu+m)\pi) P_\nu^m(z) - P_\nu^m(-z)\right]}{\partial\nu}}{\dfrac{\partial Sin((\nu+m)\pi)}{\partial\nu}}$$

$$Q_n^m(z) = \lim_{\nu\to n\in N} \frac{\pi}{2} \frac{Cos((\nu+m)\pi) \dfrac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu} - \pi\, Sin((\nu+m)\pi) P_\nu^m(z) - \dfrac{\partial P_\nu^m(-z)}{\partial\nu}}{\pi\, Cos((\nu+m)\pi)}$$

$$\Rightarrow Q_n^m(z) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+m} \dfrac{\partial P_n^m(z)}{\partial\nu} - \dfrac{\partial P_n^m(-z)}{\partial\nu}}{(-1)^{n+m}} \Rightarrow Q_n^m(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_n^m(z)}{\partial\nu} - (-1)^{n+m} \frac{\partial P_n^m(-z)}{\partial\nu}\right)$$

En injectant la formule de Bromwich dans ce résultat il vient :

$$Q_n^m(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_n^m(z)}{\partial\nu} - (-1)^{n+m} \frac{\partial P_n^m(-z)}{\partial\nu}\right) \quad et \quad \left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} = P_n^m(z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z)$$

$$\Rightarrow Q_n^m(z) = \frac{1}{2}\left(P_n^m(z) Log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z) - (-1)^{n+m} P_n^m(-z) Log\left(\frac{1-z}{2}\right) - (-1)^{n+m} \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(-z)\right)$$

$$\text{Comme} \quad P_n^m(-z) = (-1)^{n+m} P_n^m(z)$$

$$\Rightarrow Q_n^m(z) = \frac{1}{2}\left(P_n^m(z) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(z) - (-1)^{n+m} \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} R_n^m(-z)\right)$$

Cela donne pour quelques valeurs de n et m :

$$Q_n^m(z)=\frac{1}{2}\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)-(-1)^{n+m}\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(-z)\right)$$

$$P_0^1(z)=0 \quad R_0^1(z)=-1\Rightarrow Q_0^1(z)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}+\frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1-z}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$P_0^2(z)=0 \quad R_0^2(z)=-1\Rightarrow Q_0^2(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+z)}{(1-z)}-\frac{(1-z)}{(1+z)}\right)=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{2(1-z^2)}=\frac{2z}{1-z^2}$$

$$P_0^3(z)=0 \quad R_0^3(z)=-2\Rightarrow Q_0^2(z)=-\left(\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(1+z)^{\frac{3}{2}}}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}\right)=-\frac{(1-z)^3+(1+z)^3}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}=-2\frac{1+3z^2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left.\begin{array}{l}P_1^1(z)=-\sqrt{1-z^2}\\ R_1^1(z)=-(1+2z)\end{array}\right\}\Rightarrow Q_1^1(z)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-z^2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{(1+z)(1-2z)-(1-z)(1+2z)}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow Q_1^1(z)=-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}P_1^2(z)=0\\ R_1^2(z)=2+z\end{array}\right\}\Rightarrow Q_1^2(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1-z)}{(1+z)}(2+z)+\frac{(1+z)}{(1-z)}(2-z)\right)=\frac{(1-z)^2(2+z)+(1+z)^2(2-z)}{2(1+z)(1-z)}=\frac{2}{1-z^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}P_1^3(z)=0\\ R_1^3(z)=3+z\end{array}\right\}\Rightarrow Q_1^3(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}(3+z)-\frac{(1+z)^{\frac{3}{2}}}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}(3-z)\right)=\frac{(1-z)^3(3+z)-(1+z)^3(3-z)}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{8z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tableaux des fonctions de Legendre associées de deuxième espèce

Degré, Ordre	Fonctions de Legendre associées de deuxième espèce $Q_n^m(z)=\frac{1}{2}\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)-(-1)^{n+m}\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(-z)\right)$
n=0, m=1	$Q_0^1(z)=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
n=1, m=1	$Q_1^1(z)=-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$
n=2, m=1	$Q_2^1(z)=-\frac{3z\sqrt{1-z^2}}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{2-3z^2}{\sqrt{1-z^2}}$
n=3, m=1	$Q_3^1(z)=\frac{3(1-5z^2)\sqrt{1-z^2}}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{z(13-15z^2)}{2\sqrt{1-z^2}}$
n=4, m=1	$Q_4^1(z)=\frac{5z(3-7z^2)\sqrt{1-z^2}}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{-16+115z^2-105z^4}{6\sqrt{1-z^2}}$
n=5, m=1	$Q_5^1(z)=-\frac{15(1-14z^2+21z^4)\sqrt{1-z^2}}{8}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{-113z+420z^3-315z^5}{8\sqrt{1-z^2}}$
n=6, m=1	$Q_6^1(z)=-\frac{21(5z-30z^3+33z^5)\sqrt{1-z^2}}{16}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{128-2163z^2+5460z^4-3465z^6}{40\sqrt{1-z^2}}$
n=7, m=1	$Q_7^1(z)=-\frac{7(-5+135z^2-495z^4+429z^6)\sqrt{1-z^2}}{32}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{z(1873-14273z^2+27335z^4-15015z^6)}{80\sqrt{1-z^2}}$
n=8, m=1	$Q_8^1(z)=-\frac{9(-35z+385z^3-1001z^5+715z^7)\sqrt{1-z^2}}{32}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{-2048+62703z^2-301455z^4+465465z^6-225225z^8}{560\sqrt{1-z^2}}$

Degré , Ordre	Fonctions de Legendre associées de deuxième espèce $Q_n^m(z)=\frac{1}{2}\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)-(-1)^{n+m}\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(-z)\right)$
n=0, m=2	$Q_0^2(z)=\frac{2z}{1-z^2}$
n=1, m=2	$Q_1^2(z)=\frac{2}{1-z^2}$
n=2, m=2	$Q_2^2(z)=\frac{3(1-z^2)}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{z(5-3z^2)}{1-z^2}$
n=3, m=2	$Q_3^2(z)=\frac{15z(1-z^2)}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{-8+25z^2-15z^4}{1-z^2}$
n=4, m=2	$Q_4^2(z)=-\frac{15(1-z^2)(1-7z^2)}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z(81-190z^2+105z^4)}{2(1-z^2)}$
n=5, m=2	$Q_5^2(z)=-\frac{105z(1-z^2)(1-3z^2)}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{32-343z^2+630z^4-315z^6}{2(1-z^2)}$
n=6, m=2	$Q_6^2(z)=\frac{105(1-z^2)(1-18z^2+33z^4)}{16}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{z(919-5103z^2+7665z^4-3465z^6)}{8(1-z^2)}$
n=7, m=2	$Q_7^2(z)=\frac{63(1-z^2)z(15-110z^2+143z^4)}{8}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{-1024+22923z^2-86499z^4+109725z^6-45045z^8}{40(1-z^2)}$
n=8, m=2	$Q_8^2(z)=\frac{315(1-z^2)(-1+33z^2-143z^4+143z^6)}{32}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z(3781-38232z^2+109494z^4-120120z^6+45045z^8)}{16(1-z^2)}$

Degré , Ordre	Fonctions de Legendre associées de deuxième espèce $Q_n^m(z)=\frac{1}{2}\left(P_n^m(z)Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{(1-z)^{\frac{m}{2}}}{(1+z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(z)-(-1)^{n+m}\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}R_n^m(-z)\right)$
n=0, m=3	$Q_0^3(z)=-\frac{2(1+3z^2)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=1, m=3	$Q_1^3(z)=-\frac{8z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=2, m=3	$Q_2^3(z)=-\frac{8}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=3, m=3	$Q_3^3(z)=-\frac{15(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z\,(33-40\,z2+15\,z4)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=4, m=3	$Q_4^3(z)=-\frac{105z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{-48+231\,z^2-280\,z^4+105\,z^6}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=5, m=3	$Q_5^3(z)=\frac{105(1-9z^2)(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z(-663+2359\,z^2-2625\,z^4+945\,z^6)}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=6, m=3	$Q_6^3(z)=\frac{315z(3-11z^2)(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{256-3663\,z^2+10143\,z^4-10185\,z^6+3465\,z^8}{2(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=7, m=3	$Q_7^3(z)=-\frac{315(3-66\,z^2+143\,z^4)(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{8}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{z(9295-68850\,z^2+155484\,z^4-140910\,z^6+45045\,z^8)}{8(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$
n=8, m=3	$Q_8^3(z)=-\frac{3465z(3-26\,z^2+39\,z^4)(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{16}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{-2048+57189\,z^2-287694\,z^4+547932\,z^6-450450\,z^8+135135\,z^{10}}{8(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Expression formelle de quelques dérivées paramétriques pour des degrés entiers et des ordres demi-entier m=1/2, récurrence sur les degrés

Lorsque le paramètre μ est non entier alors l'expression de départ que l'on va utiliser pour ce calcul est la suivante :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\-\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

Prenons par exemple m=1/2, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\-\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

Si n=0 :

$$Expression\ \acute{e}quivalente\quad\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-m)}\underset{\nu\to0}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$Et\ \underset{\nu\to0}{Lim}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=1\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-m)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k-1)!}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\qquad\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2k+1)}{2^{2k}\Gamma(k+1)}=\frac{\sqrt{\pi}(2k)!}{2^{2k}k!}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^{2k}k!(k-1)!}{(2k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k=-\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k$$

Après quelques tâtonnements et en s'inspirant des résultats de sommation de séries, établis dans le cas des dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer (voir les polynômes de Gegenbauer d'ordre entier égal à 1, assimilables aux polynômes de Tchebychev), on peut montrer que la série suivante est le développement limité de la fonction: $\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)$

D'où le résultat:

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)=-\frac{(1-z)^{\frac{1}{4}}}{(1+z)^{\frac{1}{4}}}\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{\pi}}\qquad Or\quad P_0^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=1\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)$$

Si n=1, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\left\{-3\frac{1-z}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(1+k)!(k-2)!}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

$$= \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-3(1-z) + \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{(1+k)}{k(k-1)}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

$$= \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-3(1-z) + \sum_{k=2}^{k=\infty}\left(\frac{2}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

Deux sommes à calculer $\Rightarrow$

$$(1)\quad \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k = (1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k+1)}{(2k+1)}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k = (1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(1 - \frac{k}{2k+1}\right)\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k$$

$$= (1-z)\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k - \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k\right\}$$

$$Or \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) \quad et \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k = \frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k = (1-z)\left\{\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) + 1 - \frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}\right\} = (1-z)\left\{1 + \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\left\{1 - \frac{1}{1-z}\right\}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k = (1-z) - z\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)$$

$$\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k - (1-z) = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) - (1-z)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{k+1}{k(k-1)}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k = 3(1-z) - (2z+1)\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{(2z+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) \quad Or \quad P_1^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{(2z-1)}{\sqrt{\pi}} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}(1-z)^{\frac{1}{4}}}\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\left\{P_1^{\frac{1}{2}}(z) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\right\}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\left\{\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z) + 2\right\}$$

$$Avec \quad \widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z) = 2z - 1$$

Pour obtenir le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k=\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}-1$ *, on utilise des résultats établis antérieurement sur les dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer :*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k-1)!(k+1)!}{(2k+1)!}(1-z)^k=1-\frac{zArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}$$

$$\Rightarrow F'(z)=-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k k!(k+1)!}{(2k+1)!}(1-z)^{k-1}$$

$$\Rightarrow -(1-z)F'(z)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2(k+1)}{(2k+1)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow A-\int dz(1-z)F'(z)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^{k+1}=(1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k=\frac{A}{(1-z)}-\frac{1}{(1-z)}\int dz(1-z)F'(z)$$

A l'aide de Mathematica, on établit l'expression de l'intégrale indéfinie comme suit :

$$F(z)=1-\frac{zArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}\Rightarrow -\frac{1}{1-z}\int dz(1-z)F'(z)=\frac{z}{1-z}+\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}$$

Il suffit ensuite d'étudier le développement limité d'une partie de l'expression à savoir :

$$F(z)=1-\frac{zArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}\,G(z)=\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}-1$$

Pour se rendre compte que le développement recherchée de la série coïncide, soit :

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}(1-z)^k=\frac{ArcCos(z)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}-1$$

Prenons maintenant n=2, il vient

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=2}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(2+k)!}{k!(2-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{3-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(2+k)!(k-3)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\qquad\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\qquad\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\left\{-\frac{6}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left\{\sum_{l=0}^{l=1}\frac{1}{2+l}\right\}\frac{1-z}{2}+\frac{12}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left\{\sum_{l=0}^{l=3}\frac{1}{1+l}\right\}\frac{(1-z)^2}{4}-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(2+k)!(k-3)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}$$

$$=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\left\{-\frac{5}{\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{25}{3}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(2+k)!(k-3)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\}$$

Développons ce calcul :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-5(1-z)+\frac{25}{3}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left[\frac{2^k(2+k)!(k-3)!}{(2k)!}(1-z)^k\right]\right\}$$

$$=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-5(1-z)+\frac{25}{3}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{(k-2)(k-1)k}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

$$=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-5(1-z)+\frac{25}{3}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\left\{\frac{6}{k-2}-\frac{6}{k-1}+\frac{1}{k}\right\}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

$$Comme \quad (1) \quad \sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{1}{k}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)-(1-z)-\frac{1}{3}(1-z)^2$$

$$(2) \quad \sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k=(1-z)-\frac{2}{3}(1-z)^2-z\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)$$

$$On\ doit\ calculer \quad (3) \quad G(z)=\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-2)(2k)!}(1-z)^k=(1-z)^2\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-2)(2k)!}(1-z)^{k-2}$$

$$\frac{d\left(\frac{G(z)}{(1-z)^2}\right)}{dz}=-\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^{k-3}=-\frac{1}{(1-z)^3}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=-\frac{F(z)}{(1-z)^3}$$

$$Comme \quad \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k=H(z)=1-z-\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}zArcCos(z)=(1-z)\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^{k-1}$$

$$\frac{H(z)}{(1-z)}=1-\frac{zArcCos(z)}{\sqrt{1-z^2}}\Rightarrow\frac{d\left(\frac{H(z)}{(1-z)}\right)}{dz}=-\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^{k-2}=-\frac{1}{(1-z)^2}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=-(1-z)^2\frac{d\left(\frac{H(z)}{(1-z)}\right)}{dz}=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}-z\frac{1-z}{1+z}$$

$$Comme \quad F(z)=\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}-z\frac{1-z}{1+z}-\frac{2}{3}(1-z)^2$$

$$Prenons\ le\ chemin\ inverse \quad G(z)=-(1-z)^2\int dz\frac{F(z)}{(1-z)^3}+B(1-z)^2$$

$$Alors \quad G(z)=\frac{1-z}{3}-\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{(1+2z(1-z))ArcCos(z)}{3}+\frac{7}{9}(1-z)^2$$

$$D'où \quad (3) \quad \sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-2)(2k)!}(1-z)^k=\frac{1-z}{3}-\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{(1+2z(1-z))ArcCos(z)}{3}+\frac{7}{9}(1-z)^2$$

$$\Rightarrow(3) \quad \sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-2)(2k)!}(1-z)^k=\frac{1-z}{3}-\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{3}-\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{2z(1-z)ArcCos(z)}{3}+\frac{7}{9}(1-z)^2$$

Ce qui donne après utilisation de Mathematica, une expression finale de la dérivée paramétrique fortement simplifiée :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2}=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\left(1-2z-4z^2\right)ArcCos(z)$$

Résumons les trois résultats obtenus pour les trois degrés, n=0,1,2

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\,ArcCos(z)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\,ArcCos(z)(2z+1)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = -\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\,ArcCos(z)\left(-1+2z+4z^2\right)$$

On fait a priori une première hypothèse d'une forme définie à l'aide de polynômes de Bromwich, comme suit :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\,ArcCos(z)R_n^{\frac{1}{2}}(z)$$

Vérifions si la loi de récurrence des fonctions associées de Legendre pour les degrés 0,1 et 2, est bien vérifiée :

$$\begin{cases}(1) \quad (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)-(2\nu+1)zP_\nu^{\mu}(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z) \\ (2) \quad (\nu-\mu+1)\dfrac{\partial P_{\nu+1}^{\mu}(z)}{\partial \nu}-(2\nu+1)z\dfrac{\partial P_\nu^{\mu}(z)}{\partial \nu}+(\nu+\mu)\dfrac{\partial P_{\nu-1}^{\mu}(z)}{\partial \nu}+P_{\nu+1}^{\mu}(z)-2zP_\nu^{\mu}(z)+P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0\end{cases}$$

$$\nu=n \quad \mu=\frac{1}{2} \quad P_0^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad P_1^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}(-1+2z) \quad P_2^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-1-2z+4z^2\right)$$

$$Soit \quad P_n^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)\Rightarrow \widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=1 \quad \widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1+2z \quad \widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z+4z^2$$

$$Et \quad R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1 \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z \quad R_2^{\frac{1}{2}}(z)=1-2z-4z^2$$

$$(1) \quad \nu=1 \quad \mu=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{3}{2}\widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)-3z\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)+\frac{3}{2}\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{3}{2}\left(-1-2z+4z^2\right)-3z(-1+2z)+\frac{3}{2}=0$$

$$De\ plus \quad \widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z+4z^2-2z(-1+2z)+1=0$$

$$(2) \quad \nu=1 \quad \mu=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{3}{2}R_2^{\frac{1}{2}}(z)-3zR_1^{\frac{1}{2}}(z)+\frac{3}{2}R_0^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{3}{2}\left(1-2z-4z^2\right)-3z(-1-2z)-\frac{3}{2}=0$$

Les relations de récurrence sont donc respectées, mais avec un petit bémol. En effet il se trouve que pour les trois premiers degrés, les polynômes des fonctions associées de Legendre, et les polynômes de Bromwich respectent des identités spécifiques, il faudrait donc pousser le calcul jusqu'à l'ordre 3.

Hypothèse de récurrence sur les degrés pour l'ordre m=1/2

La deuxième hypothèse de récurrence s'affine, avec l'introduction de deux séries de polynômes de Bromwich :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)R_n^{\frac{1}{2}}(z)+G_n^{\frac{1}{2}}(z)\right\}$$

Respectant les lois de récurrences suivantes sur les degrés :

$$Soit \quad P_n^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$\begin{cases}(1) \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-(2n+1)z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\\ (2) \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)R_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-(2n+1)zR_n^{\frac{1}{2}}(z)+\left(n+\frac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\\ (3) \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)G_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-(2n+1)zG_n^{\frac{1}{2}}(z)+\left(n+\frac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\end{cases}$$

$$Départ\ des\ récurrences$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=1 \quad \widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1+2z \Rightarrow \widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z+4z^2\\ R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1 \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z \Rightarrow R_2^{\frac{1}{2}}(z)=1-2z-4z^2\\ G_0^{\frac{1}{2}}(z)=0 \quad G_1^{\frac{1}{2}}(z)=0 \quad et \quad \widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=0 \Rightarrow G_2^{\frac{1}{2}}(z)=0\end{cases}$$

De plus :

$$(1)\Leftrightarrow (2n+1)\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-(2n+1)2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+(2n+1)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0 \Rightarrow \widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0$$

D'où le résultat :

$$\begin{cases}(1) \quad \widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\\ (2) \quad R_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2zR_n^{\frac{1}{2}}(z)+R_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\\ (3) \quad G_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2zG_n^{\frac{1}{2}}(z)+G_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0 \Rightarrow \forall n \quad G_n^{\frac{1}{2}}(z)=0\end{cases}$$

Le résultat de la récurrence est donc bien :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)R_n^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{1}{4}}}{(1+z)^{\frac{1}{4}}}ArcCos(z)R_n^{\frac{1}{2}}(z)$$

$$R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1 \quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z \quad R_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2zR_n^{\frac{1}{2}}(z)+R_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0 \quad \forall n\geq 2$$

Voici le tableau des expressions successives des polynômes dits de Legendre associés pour des ordres demi-entiers, soit :

$$P_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \frac{(1+z)^{\frac{2p+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2p+1}{4}}} \frac{\widetilde{P}_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\sqrt{\pi}}$$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées pour les ordres demi-entiers*
n=0, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z) = 1$
n=1, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z) = -1 + 2\,z$
n=2, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z) = -1 - 2\,z + 4\,z^2$
n=3, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_3^{\frac{1}{2}}(z) = 1 - 4\,z - 4\,z^2 + 8\,z^3$
n=4, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_4^{\frac{1}{2}}(z) = 1 + 4\,z - 12\,z^2 - 8\,z^3 + 16\,z^4$
n=5, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_5^{\frac{1}{2}}(z) = -1 + 6\,z + 12\,z^2 - 32\,z^3 - 16\,z^4 + 32\,z^5$
n=6, m=1/2, p=0	$\widetilde{P}_6^{\frac{1}{2}}(z) = -1 - 6\,z + 24\,z^2 + 32\,z^3 - 80\,z^4 - 32\,z^5 + 64\,z^6$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées pour les ordres demi-entiers*
n=0, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_0^{\frac{3}{2}}(z) = -\frac{1}{2}$
n=1, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_1^{\frac{3}{2}}(z) = -\frac{3}{2} + z$
n=2, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_2^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{5}{2} - 9\,z + 6\,z^2$
n=3, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_3^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{7}{2} + 6\,z - 30\,z^2 + 20\,z^3$
n=4, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_4^{\frac{3}{2}}(z) = -\frac{9}{2} + 26\,z + 6\,z^2 - 84\,z^3 + 56\,z^4$
n=5, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_5^{\frac{3}{2}}(z) = -\frac{11}{2} - 21\,z + 114\,z^2 - 16\,z^3 - 216\,z^4 + 144\,z^5$
n=6, m=3/2, p=1	$\widetilde{P}_6^{\frac{3}{2}}(z) = \frac{13}{2} - 51\,z - 60\,z^2 + 400\,z^3 - 120\,z^4 - 528\,z^5 + 352\,z^6$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées pour les ordres demi-entiers*
n=0, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_0^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{3}{4}$
n=1, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_1^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{5}{4}-\frac{z}{2}$
n=2, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_2^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{21}{4}-\frac{15z}{2}+3z^2$
n=3, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_3^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{45}{4}+57z-75z^2+30z^3$
n=4, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_4^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{77}{4}-25z+255z^2-350z^3+140z^4$
n=5, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_5^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{117}{4}-\frac{435z}{2}+105z^2+840z^3-1260z^4+504z^5$
n=6, m=5/2, p=2	$\widetilde{P}_6^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{165}{4}+\frac{291z}{2}-1230z^2+1080z^3+2340z^4-3960z^5+1584z^6$

Degré, Ordre	*Polynômes dits de Legendre associées pour les ordres demi-entiers*
n=0, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_0^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{15}{8}$
n=1, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_1^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{21}{8}+\frac{3z}{4}$
n=2, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_2^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{45}{8}+\frac{21z}{4}-\frac{3z^2}{2}$
n=3, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_3^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{231}{8}+\frac{129z}{2}-\frac{105z^2}{2}+15z^3$
n=4, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_4^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{585}{8}-\frac{945z}{2}+\frac{1845z^2}{2}-735z^3+210z^4$
n=5, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_5^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{1155}{8}+\frac{465z}{4}-\frac{5145z^2}{2}+5460z^3-4410z^4+1260z^5$
n=6, m=7/2, p=3	$\widetilde{P}_6^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{1989}{8}+\frac{8967z}{4}-2625z^2-8820z^3+23310z^4-19404z^5+5544z^6$

Et celui des polynômes de Bromwich R uniquement pour la valeur de l'ordre ½ :

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich R pour les fonctions de Legendre associées*
n=0, m=1/2	$R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1$
n=1, m=1/2	$R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z$
n=2, m=1/2	$R_2^{\frac{1}{2}}(z)= 1-2z-4z^2$
n=3, m=1/2	$R_3^{\frac{1}{2}}(z)=1+4z-4z^2-8z^3$
n=4, m=1/2	$R_4^{\frac{1}{2}}(z)=-1+4z+12z^2-8z^3-16z^4$
n=5, m=1/2	$R_5^{\frac{1}{2}}(z)=-1-6z+12z^2+32z^3-16z^4-32z^5$
n=6, m=1/2	$R_6^{\frac{1}{2}}(z)=1-6z-24z^2+32z^3+80z^4-32z^5-64z^6$

On constate la relation suivante : $R_n^{\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n-1}\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(-z)$

Il est facile de prouver que les polynômes de Bromwich définis ainsi suivent la même loi de récurrence :

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0\\
&\Rightarrow \widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(-z)+2z\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(-z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(-z)=0\\
&\Rightarrow (-1)^n\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{1}{2}}(-z)-2z(-1)^{n-1}\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(-z)+(-1)^{n-2}\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{1}{2}}(-z)=0\\
&\Rightarrow R_{n+1}^{\frac{1}{2}}(z)-2zR_n^{\frac{1}{2}}(z)+R_{n-1}^{\frac{1}{2}}(z)=0
\end{aligned}$$

Et comme le départ de la récurrence est vrai, alors la relation est prouvée. Cela permet de donner une forme compacte de la dérivée paramétrique :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{1}{4}}}{(1+z)^{\frac{1}{4}}}\widetilde{P}_n^{\frac{1}{2}}(-z)ArcCos(z)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=(-1)^{n-1}P_n^{\frac{1}{2}}(-z)ArcCos(z)$$

Expression formelle de quelques dérivées paramétriques pour le degré n=0 et des ordres demi-entier m=1/2,3/2 et 5/2, récurrence sur les ordres

Si m=3/2 et m=5/2 et n=0, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k-1)!}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k-1)!}{\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Pour n=0, il vient donc

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k-1)!}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k-1)!}{\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2k)!}{2^{2k}k!} \Rightarrow \Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k-1)} \quad \Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k-3)(2k-1)}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{4k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2k(2k-1)} = \frac{\sqrt{\pi}(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!} \quad si \quad k>1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) = \frac{16k(k-1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \frac{\sqrt{\pi}(2k-4)!}{2^{2k-4}(k-2)!} \quad si \quad k>2 \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^{k-2}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}(1-z)^k\right\} \\ \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^{k-4}(k-1)!(k-2)!}{(2k-4)!}(1-z)^k\right\} \\ = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^2}{4} + \frac{(1-z)^2}{4\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k+1)!(k)!}{(2k)!}(1-z)^k\right\} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{2} + \frac{(1-z)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{1-z}{2\sqrt{\pi}}\left\{1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\} \\ \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4}\left\{-z+(1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}(k+1)\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\} \end{cases}$$

Finalement pour m=3/2, cela donne :

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k = \frac{1-z}{1+z} + \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z} \Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{1+z}\left\{2+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\right\}$$

Et pour m=5/2, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4}\left\{-z+(1-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}(k+1)\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k\right\}$$

$$= -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4}\left\{-z-(1-z)\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^{k+1}\right]\right\}$$

$$= -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1-z}{4}\left\{-z-(1-z)\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left\{\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\right\}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1-z}{4\sqrt{\pi}}\left\{-z+(4+z)\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}+3\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\frac{1-z}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1-2z}{(1+z)^2}+\frac{3}{4}\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\right\}$$

Donc pour les trois ordres m=1/2, 3/2 et 5/2, essayons de tirer une loi de récurrence à partir des trois résultats suivants :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{4}}}\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}ArcCos(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{1}{4}}}{(1+z)^{\frac{1}{4}}}ArcCos(z) = (-1)^{0+0+1}P_0^{\frac{1}{2}}(-z)ArcCos(z)$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\left\{\frac{1}{2}\frac{1-z}{1+z}+\frac{1}{2}\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}ArcCos(z)\right\} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2}\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^4}ArcCos(z)+\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{1-z}{1+z}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = (-1)^{0+1+1}P_0^{\frac{3}{2}}(-z)ArcCos(z)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{1-z}{1+z}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\left\{\frac{(1-2z)(1-z)}{(1+z)^2}+\frac{3}{4}\frac{(1-z)^{\frac{5}{2}}}{(1+z)^{\frac{5}{2}}}ArcCos(z)\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = (-1)^{0+2+1}P_0^{\frac{5}{2}}(-z)ArcCos(z)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-2z)(1-z)}{(1+z)^2}\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}$$

Ici on a introduit les polynômes associées de Legendre pour les ordres demi-entier définis comme suit : $P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)$.

On rappelle que la loi de récurrence sur les ordres demi-entier est la suivante :

$$\begin{cases} P_v^{\mu+2}(z)+\dfrac{2(1+\mu)z}{\sqrt{1-z^2}}P_v^{\mu+1}(z)+\left(v(1+v)-\mu(1+\mu)\right)P_v^{\mu}(z)=0 \\ \dfrac{\partial P_v^{\mu+2}(z)}{\partial v}+\dfrac{2(1+\mu)z}{\sqrt{1-z^2}}\dfrac{\partial P_v^{\mu+1}(z)}{\partial v}+\left(v(1+v)-\mu(1+\mu)\right)\dfrac{\partial P_v^{\mu}(z)}{\partial v}+(2v+1)P_v^{\mu}(z)=0 \end{cases} \qquad v=n \quad \mu=\frac{2m+1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+\dfrac{z(2m+3)}{\sqrt{1-z^2}}P_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ \left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+5}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+\dfrac{z(2m+3)}{\sqrt{1-z^2}}\left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+3}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)\left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+(2n+1)P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \end{cases}$$

Ce qui donne les deux relations de récurrence quelque soit le degré n :

$$\begin{cases} (1+z)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+(1-z)\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ \left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+5}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+\dfrac{z(2m+3)}{\sqrt{1-z^2}}\left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+3}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)\left.\dfrac{\partial P_v^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=n}+(2n+1)\dfrac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \end{cases}$$

On va faire l'hypothèse suivante de la forme de la dérivée paramétrique :

$$\left.\frac{\partial P_v^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=0}=\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{2}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{2}}}ArcCos(z)R_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\frac{G_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_v^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial v}\right|_{v=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}ArcCos(z)R_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{G_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}\right\}$$

En injectant cette forme dans la deuxième formule de récurrence, il vient les deux formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} (1-z)R_0^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)R_0^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\dfrac{(1+z)}{4}(2m+1)(2m+3)R_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ G_0^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)G_0^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\dfrac{(1-z^2)}{4}(2m+1)(2m+3)G_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)+(1-z^2)(1+z)^m\widetilde{P}_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \end{cases}$$

$$R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1 \quad R_0^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{2}\Rightarrow R_0^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{3}{2} \quad R_0^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{15}{8}$$

$$G_0^{\frac{1}{2}}(z)=0 \quad G_0^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)\Rightarrow G_0^{\frac{5}{2}}(z)=-(1-z)(1-2z) \quad G_0^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{(1-z)(13-24z+23z^2)}{4}$$

On l'on a bien vérifié que les résultats obtenus respectent ces deux relations de récurrence sur les ordres pour le degré n=0. Les relations de récurrence en prenant un forme similaire quelque-soit le degré s'écrirait :

$$\begin{cases} (1-z)R_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+(1+z)\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ G_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)G_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+\dfrac{(1-z^2)}{4}\left(n(1+n)-\dfrac{2m+1}{2}\dfrac{2m+3}{2}\right)G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+(1-z^2)(2n+1)(1+z)^m\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \end{cases}$$

Si maintenant on suppose la relation :

$$R_0^{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^{m-1}\widetilde{P}_0^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$$

Alors il est facile de montrer que le polynôme de Bromwich suit bien la récurrence prescrite sur les ordres. En effet :

$$(1+z)\widetilde{P}_0^{\frac{2m+5}{2}}(z) + z(2m+3)\widetilde{P}_0^{\frac{2m+3}{2}}(z) - (1-z)\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0$$

$$\Rightarrow (1-z)\widetilde{P}_0^{\frac{2m+5}{2}}(-z) - z(2m+3)\widetilde{P}_0^{\frac{2m+3}{2}}(-z) - (1+z)\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z) = 0$$

$$\Rightarrow (1-z)(-1)^{m+2}\widetilde{P}_0^{\frac{2m+5}{2}}(-z) + z(2m+3)(-1)^{m+1}\widetilde{P}_0^{\frac{2m+3}{2}}(-z) - (1+z)\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}(-1)^m\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z) = 0$$

$$\Rightarrow (1-z)R_0^{\frac{2m+5}{2}}(z) + z(2m+3)R_0^{\frac{2m+3}{2}}(z) - \frac{(1+z)}{4}(2m+1)(2m+3)R_0^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0$$

Ce qui est bien la forme de la récurrence sur le polynôme R de Bromwich. Comme la relation avec les polynômes associés de Legendre est vérifiée au départ de la récurrence pour les ordres ½, 3/2 et 5/2 alors la relation est prouvée.

Si bien que pour les degrés nuls et les ordres demi-entier la forme la plus compacte de la dérivée paramétrique est la suivante :

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = (-1)^{m-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_0^{\frac{2m+1}{2}}(-z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{G_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = (-1)^{m-1}P_0^{\frac{2m+1}{2}}(-z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{G_0^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}$$

Proposons la forme suivante de la dérivée paramétrique synthèse des deux résultats de récurrence sur les ordres (pour n=0) et de degrés (pour m=1/2), quelque-soit n et m :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} = (-1)^{m+n+1}P_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+z)^m}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

ou bien

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+z)^m}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

avec $\quad R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^{m+n+1}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$

Nous définirons plus tard précisément les lois de récurrence sur les deux polynômes R et G selon les degrés, les ordres. Mais calculons explicitement les valeurs des dérivées paramétriques à des ordres et degrés plus elevés.

Expression formelle de la dérivée paramétrique pour les degré n=1,2 et l'ordre demi-entier m=3/2 récurrence mixte sur les ordres

Si m=3/2 et n=1, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\-\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\mu=\frac{3}{2}\quad \nu=n\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{(k+1)(k-2)!}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!}\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^{k-2}(k+1)!(k-2)!}{k(2k-2)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{(1-z)}{2}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^{k-1}(k+1)((k-1)!)^2}{(k-1)(2k-2)!}(1-z)^{k-1}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{(1-z)}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k+2)(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k$$

$$Or\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}\frac{(1-z)}{2}\left\{\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}+2\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)\frac{1-z}{1+z}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\frac{3+2z}{2}ArcCos(z)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+z}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)(1+2z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\frac{3+2z}{2}ArcCos(z)$$

Soit selon la forme proposée :

$$R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3+2z}{2}\quad G_1^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)(1+2z)$$

Si m=3/2 et n=2, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\mu=\frac{3}{2}\quad \nu=2\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{(k+2)(k+1)(k-3)!}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!}\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^{k-2}(k+2)!(k-3)!}{k(2k-2)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^{k-2}(k+2)!(k-3)!}{k(2k-2)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k+3)!(k-2)!}{(k+1)(2k)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{(k+3)(k+2)}{k(k-1)}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k$$

$$\frac{(k+3)(k+2)}{k(k-1)}=1-\frac{6}{k}+\frac{12}{k-1}\qquad\left\{\begin{array}{ll}Comme\quad(1) & \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k=-(1-z)+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\\ (2) & \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(k-1)(2k)!}(1-z)^k=(1-z)-z\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z)\\ (3) & \sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=-z\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\left\{-\frac{5}{2\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{2\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)}{2\sqrt{\pi}}[(3)-6\times(1)+12\times(2)]\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{(1-z)(-1+2z+4z^2)}{1+z}+\frac{(1-z)^{\frac{3}{2}}}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}(5+18z+12z^2)\frac{ArcCos(z)}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+z}\frac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}(1-z)(-1+2z+4z^2)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}\frac{5+18z+12z^2}{2}ArcCos(z)$$

Soit selon la forme proposée :

$$R_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5+18z+12z^2}{2}\qquad G_2^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)(-1+2z+4z^2)$$

Pour pouvoir compléter les deux récurrences sur les degrés et les ordres, il faut pouvoir utiliser une récurrence mixte sur les degrés et les ordres comme suit :

$$\sqrt{1-z^2}\,\frac{\partial P_\nu^{\mu+1}(z)}{\partial \nu}-(\nu-\mu)z\frac{\partial P_\nu^{\mu}(z)}{\partial \nu}+(\nu+\mu)\frac{\partial P_{\nu-1}^{\mu}(z)}{\partial \nu}-zP_\nu^\mu(z)+P_{\nu-1}^\mu(z)=0$$

$$\mu=\frac{2m+1}{2}\quad \nu=n\quad P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}ArcCos(z)R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1+z)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\(1-z)R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)zR_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\G_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)zG_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+(1+z)^m\left\{-z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\}=0\end{cases}$$

Cette récurrence mixte est effectivement vérifiée pour n=1, m=3/2 :

$$R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1\quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z\quad G_0^{\frac{1}{2}}(z)=0\quad G_1^{\frac{1}{2}}(z)=0\quad \widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)=1\quad \widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1+2\,z$$

$$\textit{Résulat}\quad R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3+2z}{2}\quad G_1^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)(1+2z)\qquad m=0\quad n=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-z)R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{1}{2}zR_1^{\frac{1}{2}}(z)-\frac{3}{2}R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-\frac{1}{2}z(1+2z)+\frac{3}{2}=\frac{(1-z)(3+2z)}{2}\Rightarrow R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3+2z}{2}\\G_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{1}{2}zG_1^{\frac{1}{2}}(z)-\frac{3}{2}G_0^{\frac{1}{2}}(z)+(1+z)^0\left(z\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)-\widetilde{P}_0^{\frac{1}{2}}(z)\right)=z(-1+2\,z)-1=(z-1)(2z+1)\end{cases}$$

Cette récurrence mixte est également vérifiée pour n=2, m=3/2 :

$$R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z\quad R_2^{\frac{1}{2}}(z)=1-2\,z-4\,z^2\quad G_1^{\frac{1}{2}}(z)=0\quad G_2^{\frac{1}{2}}(z)=0\quad \widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1+2\,z\quad \widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2\,z+4\,z^2$$

$$\textit{Résultat}\quad R_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5+18z+12z^2}{2}\quad G_2^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)\left(-1+2\,z+4\,z^2\right)\qquad m=0\quad n=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-z)R_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3}{2}zR_2^{\frac{1}{2}}(z)-\frac{5}{2}R_1^{\frac{1}{2}}(z)=\frac{3}{2}z(1-2\,z-4\,z^2)+\frac{5}{2}(1+2z)=(1-z)\frac{5+18z+12z^2}{2}\\\Rightarrow R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5+18z+12z^2}{2}\\G_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3}{2}zG_2^{\frac{1}{2}}(z)-\frac{5}{2}G_1^{\frac{1}{2}}(z)+(1+z)^0\left\{z\widetilde{P}_2^{\frac{1}{2}}(z)-\widetilde{P}_1^{\frac{1}{2}}(z)\right\}=z(-1-2\,z+4\,z^2)-(-1+2\,z)=-(1-z)\left(-1+2\,z+4\,z^2\right)\end{cases}$$

La récurrence sur les degrés est-elle vérifiée pour m=3/2. Nous avons les trois expressions suivantes pour m=3/2 :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\dfrac{1-z}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{4}}ArcCos(z)\right\} \\ \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\dfrac{(1-z)(1+2z)}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{3+2z}{2}\dfrac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}ArcCos(z)\right\} \\ \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\dfrac{(1-z)(-1+2z+4z^2)}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{5+18z+12z^2}{2}\dfrac{(1-z)^{\frac{3}{4}}}{(1+z)^{\frac{3}{4}}}ArcCos(z)\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1-z}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+(-1)^{0+1+1}P_0^{\frac{3}{2}}(-z)ArcCos(z) \\ \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1-z)(1+2z)}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+(-1)^{1+1+1}P_1^{\frac{3}{2}}(-z)ArcCos(z) \\ \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\frac{3}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1-z)(-1+2z+4z^2)}{1+z}\dfrac{(1+z)^{\frac{3}{4}}}{(1-z)^{\frac{3}{4}}}+(-1)^{2+1+1}P_2^{\frac{3}{2}}(-z)ArcCos(z) \end{cases}$$

$$R_0^{\frac{3}{2}}(z)=\widetilde{P}_0^{\frac{3}{2}}(-z)=-\frac{1}{2}\quad G_0^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)\quad \widetilde{P}_0^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{2}$$

$$R_1^{\frac{3}{2}}(z)=-\widetilde{P}_1^{\frac{3}{2}}(-z)=\frac{3+2z}{2}\quad G_1^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)(1+2z)\quad \widetilde{P}_1^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{3-2z}{2}$$

$$R_2^{\frac{3}{2}}(z)=\widetilde{P}_2^{\frac{3}{2}}(-z)=\frac{5+18z+12z^2}{2}\quad G_2^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)(-1+2z+4z^2)\quad \widetilde{P}_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5-18z+12z^2}{2}$$

Récurrence $\quad n=1 \quad m=1$

$$\frac{1}{2}R_2^{\frac{3}{2}}(z)-3zR_1^{\frac{3}{2}}(z)+\frac{5}{2}R_0^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5+18z+12z^2}{4}-3z\frac{3+2z}{2}-\frac{5}{4}=0$$

$$\left(n-m+\frac{1}{2}\right)G_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zG_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+(1+z)^m\left(\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}G_2^{\frac{3}{2}}(z)-3zG_1^{\frac{3}{2}}(z)+\frac{5}{2}G_0^{\frac{3}{2}}(z)+(1+z)\left(\widetilde{P}_2^{\frac{3}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_1^{\frac{3}{2}}(z)+\widetilde{P}_0^{\frac{3}{2}}(z)\right)=$$

$$=\frac{(1-z)(1-2z-4z^2)}{2}+\frac{(1-z)6z(1+2z)}{2}-\frac{5(1-z)}{2}+(1+z)\left\{\frac{5-18z+12z^2}{2}+2z\frac{3-2z}{2}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=-2(1-z)(1+z)(1-2z)+2(1+z)(1-z)(1-2z)=0$$

Donc la récurrence sur les degrés entre n=0,1 et 2 pour m=3/2 est respectée pour les polynômes G. Avant de poursuivre regardons l'expression des dérivées paramétriques pour m=5/2.

Expression formelle de la dérivée paramétrique pour les degré n=1,2 et l'ordre demi-entier m=5/2

On sait que :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{3}{4}\frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}ArcCos(z)+\frac{(1-2z)(1-z)}{(1+z)^2}\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{4}(5+2z)\frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}ArcCos(z)+\frac{3(1-z)}{(1+z)^2}\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\right\}$$

Calculons directement la valeur de la dérivée paramétrique pour n=2 :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\mu}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]- \\ \displaystyle-\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\mu=\frac{5}{2}\quad \nu=2 \Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{5}{4\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{4\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{(k+2)(k+1)(k-3)!}{2^k\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}(1-z)^k$$

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!}\quad \Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-4)!}{2^{2k-4}(k-2)!}$$

$$\frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{5}{4\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{4\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{2^{k-2}(k+2)(k+1)(k-2)!(k-3)!}{(2k-4)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{5}{4\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{4\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)^2}{4\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(k+4)(k+3)}{k}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k$$

$$\left\{\begin{array}{ll}Comme & (1)\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{k(2k)!}(1-z)^k=\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}ArcCos(z) \\ & (2)\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z} \\ & (3)\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}k\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=3\frac{1-z}{(1+z)^2}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{2-z}{(1+z)^2}ArcCos(z)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{5}{4\sqrt{\pi}}(1-z)+\frac{25}{4\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)^2}{4\sqrt{\pi}}((3)+7\times(2)+12\times(1))$$

Il vient :

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{3}{4}(7+10z+4z^2)\frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}ArcCos(z)+\frac{(1-z)(5+12z-4z^2-8z^3)}{(1+z)^2}\frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\right\}$$

On voit que tous les termes en ArcCos(z) sont effectivement des fonctions associées de Legendre de première espèce d'argument opposé :

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = (-1)^{0+2+1} P_0^{\frac{5}{2}}(-z) ArcCos(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1-2z)(1-z)}{(1+z)^2} \frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = (-1)^{1+2+1} P_1^{\frac{5}{2}}(-z) ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{3(1-z)}{(1+z)^2} \frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = (-1)^{2+2+1} P_2^{\frac{5}{2}}(-z) ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1-z)(5+12z-4z^2-8z^3)}{(1+z)^2} \frac{(1+z)^{\frac{5}{4}}}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}$$

On peut facilement vérifier à la main ou à l'aide de Mathematica que toutes ces expressions vérifie les trois types de récurrence (degré, ordre, mixte degré/ordre).

Expression formelle de la dérivée paramétrique pour les degré n=1,2 et l'ordre demi-entier m=7/2

On sait que :

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{15}{8} \frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}} ArcCos(z) + \frac{(1-z)(13-24z+23z^2)}{4(1+z)^3} \frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}} \right\}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{3}{8}(7+2z) \frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}} ArcCos(z) + \frac{(1-z)(11-50z+z^2+2z^3)}{4(1+z)^3} \frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}} \right\}$$

Calculons directement la valeur de la dérivée paramétrique pour n=2 :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^\mu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\left\{\sum_{l=0}^{l=2k-1}\frac{1}{n+1-k+l}\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\Gamma(k+1-\mu)}\frac{(n+k)!(k-n-1)!}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$\mu=\frac{7}{2}\quad\nu=2\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{15}{8\sqrt{\pi}}(1-z)-\frac{25}{8\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{(k+2)(k+1)(k-3)!}{2^k\Gamma\left(k-\frac{5}{2}\right)}(1-z)^k$$

$$\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)=\frac{2k-5}{2}\Gamma\left(k-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(k-\frac{5}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-6)!}{2^{2k-6}(k-3)!}$$

$$\frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{15}{8\sqrt{\pi}}(1-z)-\frac{25}{8\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=3}^{k=\infty}\frac{(k+2)(k+1)2^{k-3}((k-3)!)^2}{(2k-6)!}(1-z)^k$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{15}{8\sqrt{\pi}}(1-z)-\frac{25}{8\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)^3}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{k=\infty}(k+5)(k+4)\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k$$

$$\left\{\begin{array}{ll}Comme & (1)\quad\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{2}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\\ & (1bis)\quad\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=\frac{1-z}{1+z}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{ArcCos(z)}{1+z}\\ & (2)\quad\sum_{k=0}^{k=\infty}k\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=-(1-z)\frac{\partial}{\partial z}(1bis)=3\frac{1-z}{(1+z)^2}+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{2-z}{(1+z)^2}ArcCos(z)\\ & (3)\quad\sum_{k=0}^{k=\infty}k^2\frac{2^k(k!)^2}{(2k)!}(1-z)^k=-(1-z)\frac{\partial}{\partial z}(3)=\frac{1-z}{(1+z)^3}(11-4z)+\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}\frac{7-7z+z^2}{(1+z)^3}ArcCos(z)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\frac{(1-z)^{\frac{5}{4}}}{(1+z)^{\frac{5}{4}}}\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{5}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=-\frac{15}{8\sqrt{\pi}}(1-z)-\frac{25}{8\sqrt{\pi}}(1-z)^2-\frac{(1-z)^3}{8\sqrt{\pi}}((3)+9\times(2)+20\times(1))$$

Il vient :

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{3}{8}(15+14z+4z^2)\frac{(1-z)^{\frac{7}{4}}}{(1+z)^{\frac{7}{4}}}ArcCos(z)-\frac{(1-z)(59+2z+5z^2-2z^3-4z^4)}{4(1+z)^3}\frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}}\right\}$$

On voit que tous les termes en ArcCos(z) sont effectivement des fonctions associées de Legendre de première espèce d'argument opposé:

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = P_0^{\frac{7}{2}}(-z)ArcCos(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)(13-24z+23z^2)}{4(1+z)^3}\frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=1} = -P_1^{\frac{7}{2}}(-z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)(11-50z+z^2+2z^3)}{4(1+z)^3}\frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}}$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{7}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2} = P_2^{\frac{7}{2}}(-z)ArcCos(z) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)(59+2z+5z^2-2z^3-4z^4)}{4(1+z)^3}\frac{(1+z)^{\frac{7}{4}}}{(1-z)^{\frac{7}{4}}}$$

Là encore à l'aide de Mathematica, on peut vérifier que toutes les récurrences sont bien respectées.

<u>Hypothèse de récurrence générale sur les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre d'ordre demi-entier</u>

Nous avons proposé la forme suivante pour les dérivées paramétriques :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = (-1)^{m+n+1} P_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+z)^m}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}} G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

ou bien

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}} R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+z)^m}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}} G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

avec $R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^{m+n+1}\tilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$ *et* $P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\tilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)$

La récurrence générale sur les degrés dérive des formules de récurrence des fonctions associées de Legendre :

$$\begin{cases} (1) \quad (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)-(2\nu+1)zP_{\nu}^{\mu}(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0 \\ (2) \quad (\nu-\mu+1)\dfrac{\partial P_{\nu+1}^{\mu}(z)}{\partial \nu}-(2\nu+1)z\dfrac{\partial P_{\nu}^{\mu}(z)}{\partial \nu}+(\nu+\mu)\dfrac{\partial P_{\nu-1}^{\mu}(z)}{\partial \nu}+P_{\nu+1}^{\mu}(z)-2zP_{\nu}^{\mu}(z)+P_{\nu-1}^{\mu}(z)=0 \end{cases}$$

$$\nu=n \quad \mu=\frac{2m+1}{2}$$

$$\begin{cases} \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)P_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zP_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)P_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)\left.\dfrac{\partial P_{\nu}^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n+1}-(2n+1)z\left.\dfrac{\partial P_{\nu}^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)\left.\dfrac{\partial P_{\nu}^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n-1}+ \\ +P_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-2zP_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+P_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\nu}^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}R_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)ArcCos(z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+z)^{m}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}G_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

$$\begin{cases} \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)z\widetilde{P}_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)R_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zR_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)G_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zG_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+ \\ +(1+z)^{m}\left\{\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\}=0 \end{cases}$$

Avec la forme proposée la récurrence sur les degrés s'écrit donc pour les trois types de polynômes:

$$\begin{cases} (1) \quad \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)z\widetilde{P}_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ (2) \quad \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)R_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zR_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0 \\ (3) \quad \left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)G_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zG_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\dfrac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+ \\ +(1+z)^{m}\left\{\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_{n}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\}=0 \end{cases}$$

Résumons donc les résultats obtenus à l'aide de toutes les récurrences sur les ordres et sur les degrés :

$$P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)\quad \left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}ArcCos(z)R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\frac{G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}\right\}$$

$$\begin{cases}
(1)\quad \left(n-m+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(2)\quad (1+z)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+(1-z)\left(n(1+n)-\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(3)\quad (1+z)\widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(4)\quad \left(n-m+\frac{1}{2}\right)R_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zR_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(5)\quad (1-z)R_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+(1+z)\left(n(1+n)-\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right)R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(6)\quad (1-z)R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)zR_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(7)\quad \left(n-m+\frac{1}{2}\right)G_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-(2n+1)zG_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\\
\qquad +(1+z)^m\left\{\widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)-2z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\}=0\\
(8)\quad G_n^{\frac{2m+5}{2}}(z)+z(2m+3)G_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)+(1-z^2)\left(n(1+n)-\frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right)G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\\
\qquad +(2n+1)(1-z^2)(1+z)^m\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=0\\
(9)\quad G_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)-\left(n-m-\frac{1}{2}\right)zG_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\left(n+m+\frac{1}{2}\right)G_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)+(1+z)^m\left\{-z\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)+\widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\}=0
\end{cases}$$

Départ des récurrences

$$R_0^{\frac{1}{2}}(z)=-1\quad R_0^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{2}\quad R_1^{\frac{1}{2}}(z)=-1-2z\quad G_0^{\frac{1}{2}}(z)=0\quad G_0^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)\quad G_1^{\frac{1}{2}}(z)=0$$

L'hypothèse supplémentaire est de supposer comme on la remarquer à plusieurs reprises que le terme en ArcCos est une fonction de Legendre et que la forme de la dérivée paramétrique pour les fonctions de Legendre associées d'ordre demi-entier est la suivante :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = (-1)^{n+m-1} P_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z) ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}} \frac{G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}$$

ou bien

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = (-1)^{n+m-1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}} ArcCos(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}} \frac{G_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)}{(1+z)^m}$$

$$Soit \quad R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^{n+m-1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$$

Pour prouver l'hypothèse, il suffit de considérer les lois de récurrences des fonctions associées de Legendre de première espèce. Il vient :

$$\begin{cases} \left(n-m+\frac{1}{2}\right) P_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) - (2n+1) z P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) + \left(n+m+\frac{1}{2}\right) P_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0 \\ (1+z) \widetilde{P}_n^{\frac{2m+5}{2}}(z) + z(2m+3) \widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z) + (1-z)\left(n(1+n) - \frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right) P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0 \\ (1+z) P_n^{\frac{2m+3}{2}}(z) - \left(n-m-\frac{1}{2}\right) z P_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) + \left(n+m+\frac{1}{2}\right) P_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left\{(-1)^{n+1+m+1} \widetilde{P}_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(-z)\right\} - (2n+1) z \left\{(-1)^{n+m+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)\right\} + \left(n+m+\frac{1}{2}\right)\left\{(-1)^{n-1+m+1} \widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(-z)\right\} = 0 \\ (1-z)\left\{(-1)^{n+m+2+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+5}{2}}(-z)\right\} + z(2m+3)\left\{(-1)^{n+m+1+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(-z)\right\} + \\ + (1+z)\left(n(1+n) - \frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right)\left\{(-1)^{n+m+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)\right\} = 0 \\ (1+z)\left\{(-1)^{n+m+1+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+3}{2}}(z)\right\} - \left(n-m-\frac{1}{2}\right) z \left\{(-1)^{n+m+1} \widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)\right\} + \left(n+m+\frac{1}{2}\right)\left\{(-1)^{n-1+m+1} \widetilde{P}_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(-z)\right\} = 0 \end{cases}$$

Ce qui est exactement le jeu de relation de récurrence des polynômes R

$$\left(n-m+\frac{1}{2}\right) R_{n+1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) - (2n+1) z R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) + \left(n+m+\frac{1}{2}\right) R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0$$

$$(1-z) R_n^{\frac{2m+5}{2}}(z) + z(2m+3) R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z) + (1+z)\left(n(1+n) - \frac{2m+1}{2}\frac{2m+3}{2}\right) R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0$$

$$(1-z) R_n^{\frac{2m+3}{2}}(z) - \left(n-m-\frac{1}{2}\right) z R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) + \left(n+m+\frac{1}{2}\right) R_{n-1}^{\frac{2m+1}{2}}(z) = 0$$

et comme les départs de récurrence vérifie l'hypothèse elle est prouvée.

Voici les expressions des polynômes de Bromwich R pour diverses valeurs de n,m (les valeurs pour m=1/2 ont déjà été données) :

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich R pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées* $R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^{n+m-1}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$
n=0, m=3/2	$R_0^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{2}$
n=1, m=3/2	$R_1^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{3}{2}+z$
n=2, m=3/2	$R_2^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{5}{2}+9\,z+6\,z^2$
n=3, m=3/2	$R_3^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{7}{2}+6\,z+30\,z^2+20\,z^3$
n=4, m=3/2	$R_4^{\frac{3}{2}}(z)=-\frac{9}{2}-26\,z+6\,z^2+84\,z^3+56\,z^4$
n=5, m=3/2	$R_5^{\frac{3}{2}}(z)=+\frac{11}{2}-21\,z-114\,z^2-16\,z^3+216\,z^4+144\,z^5$
n=6, m=3/2	$R_6^{\frac{3}{2}}(z)=\frac{13}{2}+51\,z-60\,z^2-400\,z^3-120\,z^4+528\,z^5+352\,z^6$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich R pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées* $R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^{n+m-1}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$
n=0, m=5/2, p=2	$R_0^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{3}{4}$
n=1, m=5/2, p=2	$R_1^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{5}{4}+\frac{z}{2}$
n=2, m=5/2, p=2	$R_2^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{21}{4}-\frac{15z}{2}-3\,z^2$
n=3, m=5/2, p=2	$R_3^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{45}{4}-57\,z-75\,z^2-30\,z^3$
n=4, m=5/2, p=2	$R_4^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{77}{4}-25\,z-255\,z^2-350\,z^3-140\,z^4$
n=5, m=5/2, p=2	$R_5^{\frac{5}{2}}(z)=\frac{117}{4}+\frac{435z}{2}+105\,z^2-840\,z^3-1260\,z^4-504\,z^5$
n=6, m=5/2, p=2	$R_6^{\frac{5}{2}}(z)=-\frac{165}{4}+\frac{291\,z}{2}+1230\,z^2+1080\,z^3-2340\,z^4-3960\,z^5-1584\,z^6$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich R pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées* $R_n^{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^{n+m-1}\widetilde{P}_n^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$
n=0, m=7/2, p=3	$R_0^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{15}{8}$
n=1, m=7/2, p=3	$R_1^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{21}{8}+\frac{3z}{4}$
n=2, m=7/2, p=3	$R_2^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{45}{8}-\frac{21\,z}{4}-\frac{3\,z^2}{2}$
n=3, m=7/2, p=3	$R_3^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{231}{8}+\frac{129\,z}{2}+\frac{105\,z^2}{2}+15\,z^3$
n=4, m=7/2, p=3	$R_4^{\frac{7}{2}}(z)=\frac{585}{8}+\frac{945z}{2}+\frac{1845\,z^2}{2}+735\,z^3+210\,z^4$
n=5, m=7/2, p=3	$R_5^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{1155}{8}+\frac{465\,z}{4}+\frac{5145\,z^2}{2}+5460\,z^3+4410\,z^4+1260\,z^5$
n=6, m=7/2, p=3	$R_6^{\frac{7}{2}}(z)=-\frac{1989}{8}-\frac{8967\,z}{4}-2625\,z^2+8820\,z^3+23310\,z^4+19404\,z^5+5544\,z^6$

Voici les expressions des polynômes de Bromwich G pour diverses valeurs de n,m (les valeurs pour m=1/2 sont toutes nulles) :

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich G pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées*
n=0, m=3/2, p=1	$G_0^{\frac{3}{2}}(z)=-(1-z)$
n=1, m=3/2, p=1	$G_1^{\frac{3}{2}}(z)=(-1-2\,z)(1-z)$
n=2, m=3/2, p=1	$G_2^{\frac{3}{2}}(z)=(1-2\,z-4\,z^2)(1-z)$
n=3, m=3/2, p=1	$G_3^{\frac{3}{2}}(z)=(1+4\,z-4\,z^2-8\,z^3)(1-z)$
n=4, m=3/2, p=1	$G_4^{\frac{3}{2}}(z)=(-1+4\,z+12\,z^2-8\,z^3-16\,z^4)(1-z)$
n=5, m=3/2, p=1	$G_5^{\frac{3}{2}}(z)=(-1-6\,z+12\,z^2+32\,z^3-16\,z^4-32\,z^5)(1-z)$
n=6, m=3/2, p=1	$G_6^{\frac{3}{2}}(z)=(1-6\,z-24\,z^2+32\,z^3+80\,z^4-32\,z^5-64\,z^6)(1-z)$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich G pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées*
n=0, m=5/2, p=2	$G_0^{\frac{5}{2}}(z)=(-1+2z)(1-z)$
n=1, m=5/2, p=2	$G_1^{\frac{5}{2}}(z)=3(1-z)$
n=2, m=5/2, p=2	$G_2^{\frac{5}{2}}(z)=(5+12z-4z^2-8z^3)(1-z)$
n=3, m=5/2, p=2	$G_3^{\frac{5}{2}}(z)=(-7+18z+44z^2-16z^3-32z^4)(1-z)$
n=4, m=5/2, p=2	$G_4^{\frac{5}{2}}(z)=(-9-42z+60z^2+144z^3-48z^4-96z^5)(1-z)$
n=5, m=5/2, p=2	$G_5^{\frac{5}{2}}(z)=(11-52z-180z^2+184z^3+432z^4-128z^5-256z^6)(1-z)$
n=6, m=5/2, p=2	$G_6^{\frac{5}{2}}(z)=(13+88z-216z^2-656z^3+528z^4+1216z^5-320z^6-640z^7)(1-z)$

Degré, Ordre	*Polynôme de Bromwich G pour les dérivées paramétriques des fonctions de Legendre associées*
n=0, m=7/2, p=3	$G_0^{\frac{7}{2}}(z)=\left(-\frac{13}{4}+6z-\frac{23z^2}{4}\right)(1-z)$
n=1, m=7/2, p=3	$G_1^{\frac{7}{2}}(z)=\left(\frac{11}{4}-\frac{25z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{2}\right)(1-z)$
n=2, m=7/2, p=3	$G_2^{\frac{7}{2}}(z)=\left(-\frac{59}{4}-\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{4}+\frac{z^3}{2}+z^4\right)(1-z)$
n=3, m=7/2, p=3	$G_3^{\frac{7}{2}}(z)=\left(-\frac{131}{4}-89z+\frac{211z^2}{4}+117z^3-23z^4-46z^5\right)(1-z)$
n=4, m=7/2, p=3	$G_4^{\frac{7}{2}}(z)=\left(\frac{227}{4}-173z-\frac{1931z^2}{4}+309z^3+689z^4-142z^5-284z^6\right)(1-z)$
n=5, m=7/2, p=3	$G_5^{\frac{7}{2}}(z)=\left(\frac{347}{4}+\frac{909z}{2}-\frac{3251z^2}{4}-\frac{4397z^3}{2}+1289z^4+2864z^5-572z^6-1144z^7\right)(1-z)$
n=6, m=7/2, p=3	$G_6^{\frac{7}{2}}(z)=\left(-\frac{491}{4}+\frac{1317z}{2}+\frac{10151z^2}{4}-\frac{6701z^3}{2}-8758z^4+4592z^5+10140z^6-1912z^7-3824z^8\right)(1-z)$

Calcul des fonctions de Legendre associées de deuxième espèce de degré entier et d'ordre demi-entier, (fonctions dîtes « On the Cut » ou encore fonctions de Ferrer

Les formules de liaisons pour les fonctions Legendre de première et deuxième espèce sont les suivantes , mais comme elles ne présentent pas de singularité, les fonctions de deuxième espèce se calculent directement comme suit :

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \quad \nu,\mu \notin \mathbf{N}$$

$$\mu = \frac{2m+1}{2} \Rightarrow Q_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos\left(\left(n+\frac{2m+1}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z) - P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(-z)}{Sin\left(\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\pi\right)} \Rightarrow Q_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = -(-1)^{n+m}\frac{\pi}{2}P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$$

A l'aide des polynômes associées de Legendre, on a :

$$P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Q_n^{\frac{2m+1}{2}}(z) = -(-1)^{n+m}\frac{\pi}{2}P_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(-z) = -(-1)^{n+m}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(1-z)^{\frac{2m+1}{4}}}{(1+z)^{\frac{2m+1}{4}}}\widetilde{P}_\nu^{\frac{2m+1}{2}}(-z)$$

Levée de l'incertitude aux pôles de la fonction Gamma pour les dérivées premières par rapport au degré, pour les fonctions de Gegenbauer de degré entier et d'ordre quelconque

Les expressions de la fonction de Gegenbauer de première espèce et de sa dérivée paramétrique, sous la forme de série hypergéométrique, est la suivante :

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right) = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu} = \left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}C_\nu^\lambda(z)+ \\ +\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)\Gamma(-\nu)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(k!)}\times \\ \times(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} = \left\{\begin{array}{l}\{\psi(n+2\lambda)-\psi(n+1)\}C_n^\lambda(z)+ \\ +\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{n!\Gamma(2\lambda)}\displaystyle\lim_{\nu\to n}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\times\dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \\ \times(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

La forme de la dérivée paramétrique présente donc une singularité aux pôles de la fonction Gamma. Mais nous pouvons lever cette incertitude par passage à la limite comme nous l'avons fait pour les fonctions de Legendre et de Legendre associées.

Développons un peu plus ce calcul :

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \left\{ \begin{array}{l} \{\psi(n+2\lambda)-\psi(n+1)\} C_n^\lambda(z) + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(2\lambda)} \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!} \times \left\{ \underset{\nu\to n}{Lim} \dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \right\} \times \\ \left(\psi(n+2\lambda+k)-\psi(n+2\lambda)+\psi(n+1)-\psi(n+1-k)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \end{array} \right] - \\ - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left[\dfrac{\Gamma(n+2\lambda+k)(k-n-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!} \underset{\nu\to n}{Lim} \dfrac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \right] \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Or $\underset{\nu\to n}{Lim} \dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)} = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}$ *et* $\underset{\nu\to n}{Lim} \dfrac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)} = (-1)^n n!$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \left\{ \begin{array}{l} \{\psi(n+2\lambda)-\psi(n+1)\} C_n^\lambda(z) + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \left[\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^k \Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(n-k)!\,k!} \times \\ \times\left(\psi(n+2\lambda+k)-\psi(n+2\lambda)+\psi(n+1)-\psi(n+1-k)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \end{array} \right] - \\ -(-1)^n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left[\dfrac{\Gamma(n+2\lambda+k)(k-n-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!} \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k \right] \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Cette dernière expression peut être utilisée pour calculer directement les dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer de première espèce de degré entier et d'ordre quelconque.

Résultat de récurrence sur les dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer de degré entier et d'ordre entier ou demi-entier

Formes et récurrences sur les ordres λ demi-entier :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = C_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) Log\left[\frac{1+z}{2}\right] + \frac{R_n^{\frac{2p+1}{2}}(z)}{(1+z)^p}$$

$$(n+1)C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 0 \quad pour\ n \geq 1$$

$$Départ\ de\ la\ récurrence \quad C_{-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 0 \quad C_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = 1$$

$$(n+1)R_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) - (2p+1+2n)zR_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) + (2p+n)R_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) = (1+z)^p\left[-C_{n+1}^{\frac{2p+1}{2}}(z) + 2zC_n^{\frac{2p+1}{2}}(z) - C_{n-1}^{\frac{2p+1}{2}}(z)\right]$$

$$à\ partir\ de\ \ n \geq 1$$

$$Départ\ de\ la\ récurrence \quad R_0^{\frac{2p+1}{2}}(z) = H_{2p}(1+z)^p - (p!)^2(1-z)\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{(1+z)^k(1-z)^{p-1-k}}{(p-k)k!(2p-k)!} \quad p>0 \quad R_0^{\frac{1}{2}}(z) = 0$$

$$R_1^{\frac{2p+1}{2}}(z) = \left\{\begin{array}{l} (2p+1)z(1+z)^p\{H_{2p+1}-1\} - \\ -(1-z)\left[\begin{array}{l}\dfrac{(2p+1)(1+z)^p}{(2p+2)} + \dfrac{(p!)^2}{2(2p)!}(1-z)^p + \\ +(2p+1)p!(p+1)!\displaystyle\sum_{l=0}^{l=p-1}\frac{(p-l+z(p+1))}{(l+1)!(p-l)(2p+1-l)!}(1-z)^{p-1-l}(1+z)^l\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad p>0$$

$$R_1^{\frac{1}{2}}(z) = z-1 \qquad H_{2p}\ et\ H_{2p+1} \quad nombres\ harmoniques \quad H_n = \sum_{l'=1}^{l'=n}\frac{1}{l}$$

Formes et récurrences sur les ordres λ entier :

Forme des dérivées paramétriques

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2n}=\frac{D_{2n}^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+z\frac{E_{2n}^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)$$

$$\left.\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=2n+1}=z\frac{D_{2n+1}^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-1}}+\frac{E_{2n+1}^\lambda(z^2)}{(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}Arcos(z)$$

Avec

$$\begin{cases} D_{2n}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n \\ E_{2n}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n \\ D_{2n+1}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2(\lambda-1)+2n \\ E_{2n+1}^\lambda(z^2)\ \text{polynômes en } z^2 \text{ de degré } 2\lambda+2n \end{cases}$$

Départ de la récurrence

$$D_0^1(z^2)=0 \quad E_0^1(z^2)=1 \quad D_1^1(z^2)=0 \quad E_1^1(z^2)=2z^2-1$$

$$D_0^2(z^2)=\frac{1-2z^2}{2} \quad E_0^2(z^2)=\frac{3-2z^2}{2} \quad D_1^2(z^2)=\frac{3-4z^2}{2} \quad E_1^2(z^2)=-\frac{3-12z^2+8z^4}{2}$$

Récurrence sur les ordres pour les degrés 0 et 1

$$D_0^\lambda(z^2)=-\frac{1}{2(\lambda-1)}\begin{Bmatrix}(2(\lambda-1)z^2-4\lambda+5)D_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)(2\lambda-3)D_0^{\lambda-2}(z^2)- \\ -2(1-z^2)^{\lambda-1}+\frac{(4\lambda-7)}{2(\lambda-2)}(1-z^2)^{\lambda-2}\end{Bmatrix} \quad \lambda>2$$

$$D_1^\lambda(z^2)=-\frac{1}{2(\lambda-1)}\begin{Bmatrix}(2\lambda z^2+3-4\lambda)D_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)\frac{(2\lambda-3)(2\lambda-2)}{2(\lambda-2)}D_0^{\lambda-2}(z^2)+ \\ -4(\lambda-1)(1-z^2)^{\lambda-1}+(4\lambda-5)(1-z^2)^{\lambda-2}\end{Bmatrix} \quad \lambda>2$$

$$E_0^\lambda(z^2)=-\frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{(2(\lambda-1)z^2-4\lambda+5)E_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)(2\lambda-3)E_0^{\lambda-2}(z^2)\right\} \quad \lambda>2$$

$$E_1^\lambda(z^2)=-\frac{1}{2(\lambda-1)}\left\{(2\lambda z^2+3-4\lambda)E_0^{\lambda-1}(z^2)+(1-z^2)\frac{(2\lambda-3)(\lambda-1)}{(\lambda-2)}E_0^{\lambda-2}(z^2)\right\} \quad \lambda>2$$

Récurrence sur les degrés

$$D_{2n}^\lambda(z^2)=\frac{2(\lambda+2n-1)z^2D_{2n-1}^\lambda(z^2)-(2\lambda+2n-2)D_{2n-2}^\lambda(z^2)+(1-z^2)^{\lambda-1}\left\{-C_{2n}^\lambda(z)+2zC_{2n-1}^\lambda(z)-C_{2n-2}^\lambda(z)\right\}}{2n}$$

$$E_{2n}^\lambda(z^2)=\frac{2(\lambda+2n-1)E_{2n-1}^\lambda(z^2)-(2\lambda+2n-2)E_{2n-2}^\lambda(z^2)}{2n}$$

$$D_{2n+1}^\lambda(z^2)=\frac{2(\lambda+2n)D_{2n}^\lambda(z^2)-(2\lambda+2n-1)D_{2n-1}^\lambda(z^2)+(1-z^2)^{\lambda-1}\frac{\left\{-C_{2n+1}^\lambda(z)+2zC_{2n}^\lambda(z)-C_{2n-1}^\lambda(z)\right\}}{z}}{2n+1}$$

$$E_{2n+1}^\lambda(z^2)=\frac{2(\lambda+2n)z^2E_{2n}^\lambda(z^2)-(2\lambda+2n-1)E_{2n-1}^\lambda(z^2)}{2n+1}$$

.

Tous ces résultats de récurrence sont corroborés par comparaison avec l'évaluation directe de la dérivée paramétrique aux degrés entier, sous forme de série, comme exprimée précédemment :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(n+2\lambda)-\psi(n+1)\}C_{n}^{\lambda}(z)+\\+\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(-1)^{k}\Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(n-k)!k!}\times\\\times\left(\psi(n+2\lambda+k)-\psi(n+2\lambda)+\psi(n+1)-\psi(n+1-k)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{k}\end{array}\right]-\\-(-1)^{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(n+2\lambda+k)(k-n-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{k}\right]\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

Des fonctions élusives de la physique mathématique : ***Les fonctions associées de Gegenbauer.*** *Levée de l'incertitude aux pôles de la fonction Gamma pour les dérivées premières par rapport au degré, pour les fonctions associées de Gegenbauer de degré entier et d'ordre quelconque*

Élusives sont ces fonctions que l'on ne trouve nulle part dans la littérature scientifique, autrement à ma connaissance que dans un ouvrage d'un mathématicien japonais (Masaru Takeuchi, Modem spherical functions, 1994, pages 194 et suivantes), non complètement étudiées et construites dans l'ouvrage à l'aide d'une formule de Rodrigues. Ce sont des fonctions solutions de l'équation différentielle du second degré. On peut imaginer qu'il s'agit d'une équation rencontrée dans la solution de problèmes aux limites sur l'hypersphère :

$$\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{\partial y(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{m(m+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}y(z)=0$$

Les fonctions associées de Gegenbauer de première espèce sont donc définies comme une généralisation des fonctions de Gegenbauer à l'image de ce que sont les fonctions associées de Legendre vis à vis des fonctions de Legendre. Les fonctions de Gegenbauer de première (polynômes) et deuxième espèces sont définies comme solution de l'équation aux dérivées partielles du second degré suivante :

$$C_\nu^\lambda(z), C_{(Q),\nu}^\lambda(z) \Leftarrow y(z) \quad \Big/ \quad \left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{\partial y(z)}{\partial z}+\nu(\nu+2\lambda)y(z)=0$$

Toute comme les fonctions associées de Legendre d'ordre entier que l'on peut définir à une constante prés comme la dérivée m-ième de la fonction de Legendre, la construction des fonctions associées de Gegenbauer peuvent suivre le même procédé, soit :

$$P_\nu^m(z)=(-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m P_\nu(z)}{\partial z^m} \leftrightarrow C_\nu^{\lambda,m}(z)=(-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m C_\nu^\lambda(z)}{\partial z^m}$$

Formules qui sont également valables pour les secondes solutions, soit :

$$Q_\nu^m(z)=(-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m Q_\nu(z)}{\partial z^m} \leftrightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z)=(-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m C_{(Q),\nu}^\lambda(z)}{\partial z^m}$$

A partir de cette construction, il est facile de montrer qu'une telle fonction est solution de l'équation différentielle suivante :

$$C_\nu^{\lambda,m}(z), C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z) \Leftarrow y(z) \quad \left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{\partial y(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{m(m+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}y(z)=0$$

Par généralisation, on cherche donc à construire une solution de l'équation suivante :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z), C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) \Leftarrow y(z) \quad \left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)\,z\,\frac{\partial y(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}y(z)=0$$

Parmi les formules permettant d'identifier les polynômes/fonctions de Gegenbauer et les fonctions de deuxième espèce, donnons les formules de liaison avec les fonctions de Legendre associées :

$$C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) \quad z\in[-1,1]$$

On en déduit au passage le Wronskien des fonctions de Gegenbauer :

$$W(fg, fh) = (fg' + f'g)fh - fg(fh' + f'h) = f^2 W(g,h)$$

$$\Rightarrow W\left(C_\nu^\lambda(z), C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right) = \left\{\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\right\}^2 W\left\{\mathrm{P}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z), \mathrm{Q}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right\}$$

Or ce dernier Wronskien permet d'obtenir celui des fonctions de Gegenbauer :

$$W\left\{\mathrm{P}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z), \mathrm{Q}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right\} = \frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\lambda+1\right)} = \frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}$$

$$\Rightarrow W\left\{C_\nu^\lambda(z), C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right\} = \frac{\pi}{2^{2\lambda-1}}\left(\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\right)^2\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}$$

$$\Rightarrow W\left\{C_\nu^\lambda(z), C_{(Q),\nu}^\lambda(z)\right\} = \frac{\pi}{2^{2\lambda-1}}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\left(\Gamma(\lambda)\right)^2}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1+2\lambda}{2}}$$

Comme d'autre part on connaît les formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer de première espèce, il vient :

$$\frac{\partial C_\nu^\lambda(z)}{\partial z} = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) \quad \ldots \frac{\partial^2 C_\nu^\lambda(z)}{\partial z^2} = 2^2\lambda(\lambda+1)C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z) \quad \ldots \quad \frac{\partial^m C_\nu^\lambda(z)}{\partial z^m} = 2^m(\lambda)_m C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$$

$$(\lambda)_m = (\lambda+m-1)(\lambda+m-2)\ldots\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} \quad \textit{symbole de Pochhammer}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,m}(z) = (-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m C_\nu^\lambda(z)}{\partial z^m} = (-1)^m 2^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$$

$$\textit{De plus } C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z) = \frac{2^{-m}\left(1-z^2\right)^{-\frac{m}{2}}2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda+m)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,m}(z) = (-1)^m\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}(z)$$

Et comme les formules de dérivation sont également valables pour les fonctions de Gegenbauer de deuxième espèce, il vient également :

$$C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\qquad \frac{\partial^m C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)}{\partial z^m}=2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C^{\lambda+m}_{(Q),\nu-m}(z)$$

$$\Rightarrow C^{\lambda,m}_{(Q),\nu}(z)=(-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^m C^{\lambda}_{(Q),\nu}(z)}{\partial z^m}=(-1)^m 2^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C^{\lambda+m}_{(Q),\nu-m}(z)$$

$$De\ plus\ \ C^{\lambda+m}_{(Q),\nu-m}(z)=\frac{2^{-m}\left(1-z^2\right)^{-\frac{m}{2}}2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda+m)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow C^{\lambda,m}_{(Q),\nu}(z)=(-1)^m\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

On en déduit notamment le Wronskien des fonctions de Gegenbauer associées :

$$W(fg,fh)=(fg'+f'g)fh-fg(fh'+f'h)=f^2W(g,h)$$

$$\Rightarrow W\left(C^{\lambda,m}_{\nu}(z),C^{\lambda,m}_{(Q),\nu}(z)\right)=\left\{\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\right\}^2 W\left\{\mathsf{P}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z),\mathsf{Q}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right\}$$

Or ce dernier Wronskien des fonctions de Legendre associées se calcule comme le précédent :

$$W\left\{\mathsf{P}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z),\mathsf{Q}^{\frac{1}{2}-\lambda-m}_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)\right\}=\frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\lambda-m+1\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\lambda+m+1\right)}=\frac{1}{1-z^2}\frac{\Gamma(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+2\lambda+m)}$$

On en déduit le Wronskien des fonctions de Gegenbauer associées :

$$W\left(C^{\lambda,m}_{\nu}(z),C^{\lambda,m}_{(Q),\nu}(z)\right)=\frac{2^{1-2\lambda}\pi}{\Gamma(\lambda)^2}\frac{\Gamma(\nu+m+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1-m)}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1+2\lambda}{2}}$$

La méthode de construction par la formule de Rodrigues permet d'exprimer le développement des fonctions de Gegenbauer associées ***<u>pour les valeurs quelconques de λ et des valeurs de μ entières</u>****, avec par exemple le développement suivant, également valable « on the cut », qui redonnent bien le développement connu des fonctions associées de Legendre dans le cas λ=1/2 :*

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}\left\{{}_2F_1(a,b;c;z)\right\}=\frac{(a)_\mu(b)_\mu}{(c)_\mu}\ {}_2F_1(a+\mu,b+\mu;c+\mu;z)\Rightarrow$$

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}\left\{{}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda\,;\frac{1}{2}+\lambda\,;\frac{1-z}{2}\right)\right\}=\frac{(-1)^\mu}{2^\mu}\frac{(-\nu)_\mu(\nu+2\lambda)_\mu}{\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)_\mu}\ {}_2F_1\left(-\nu+\mu,\nu+2\lambda+\mu\,;\frac{1}{2}+\lambda+\mu\,;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\partial^\mu C_\nu^\lambda(z)}{\partial z^\mu}\quad(-\nu)_\mu=\frac{\Gamma(-\nu+\mu)}{\Gamma(-\nu)}\quad(\nu+2\lambda)_\mu=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}\quad\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)_\mu=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}$$

$$Comme\quad C_\nu^\lambda(z)=\frac{\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\nu+1)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda\,;\frac{1}{2}+\lambda\,;\frac{1-z}{2}\right)\quad et\quad\frac{\Gamma(-\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}=(-1)^\mu$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{2^\mu\Gamma(2\lambda)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}\frac{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1\left(\mu-\nu,\nu+2\lambda+\mu\,;\frac{1}{2}+\lambda+\mu\,;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\begin{cases}Avec\ la\ formule\quad C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu 2^\mu\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\dfrac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)}C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(z)\\ \Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\dfrac{2^\mu\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2\mu)}\dfrac{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_2F_1\left(\mu-\nu,\nu+2\lambda+\mu\,;\dfrac{1}{2}+\lambda+\mu\,;\dfrac{1-z}{2}\right)\\ Formule\ identique\ car\quad\dfrac{2^\mu\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2\mu)}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{2^\mu\Gamma(2\lambda)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^\mu\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(1+\mu)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1\left(-\nu+\mu,\nu+1+\mu\,;1+\mu\,;\dfrac{1-z}{2}\right)\\ Or\quad\mu\in\mathbf{N}\quad\begin{cases}P_\nu^\mu(z)=\dfrac{(-\nu)_\mu(\nu+1)_\mu}{2^\mu\Gamma(1+\mu)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1\left(-\nu+\mu,\nu+1+\mu\,;1+\mu\,;\dfrac{1-z}{2}\right)\\ =(-1)^\mu\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(1+\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\ {}_2F_1\left(-\nu+\mu,\nu+1+\mu\,;1+\mu\,;\dfrac{1-z}{2}\right)\\ Attention\quad erreur\ de\ formule\ sur\ le\ site\ Mathematica\ Function\end{cases}\end{cases}$$

$$\mu=0\Rightarrow C_\nu^{\lambda,0}(z)=C_\nu^\lambda(z)=\frac{\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\nu+1)}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+2\lambda\,;\frac{1}{2}+\lambda\,;\frac{1-z}{2}\right)$$

Le développement suivant de la fonction associée de Gegenbauer est obtenue à partir d'un développement connu de la fonction associée de Legendre en fonction hypergéométrique :

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}\frac{(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}\frac{(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

avec l'expression : $C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$ *lorsque μ est un entier, il vient :*

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

Ce qui redonne avec λ=1/2 un développement connu de la fonction associée de Legendre lorsque μ est un entier :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z)=P_\nu^\mu(z)=(-1)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(1+\mu)}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1+\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

Partant maintenant de l'équation différentielle des fonctions associées de Gegenbauer :

$$\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 C_\nu^{\lambda,\mu}(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)z\frac{\partial C_\nu^{\lambda,\mu}(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=0$$

On peut utiliser une transformation de cette équation différentielle qui permet de se rapprocher des fonctions associées de Legendre. Notons que la manipulation réalisée à partir de la formule de Rodrigues, sur la formule liant fonctions de Gegenbauer et fonctions associées de Legendre aboutit au même résultat lorsque µ est entier. Il vient :

$$\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 C_\nu^{\lambda,\mu}(z)}{\partial z^2}-(2\lambda+1)\frac{\partial C_\nu^{\lambda,\mu}(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=0 \quad Si\ C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}y(z)$$

$$y(z)\quad solution\ de:\ \left(1-z^2\right)y''(z)-2z\ y'(z)+\left(\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2}{1-z^2}-\frac{\mu\left(\mu-2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\right)}{1-z^2}\right)y(z)=0$$

$$\Rightarrow\left(1-z^2\right)y''(z)-2z\ y'(z)+\left(\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)^2}{1-z^2}\right)y(z)=0\Rightarrow y(z)=C_1P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=C_1\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Cela permet d'exprimer un développement de la fonction de première espèce pour <u>les valeurs de λ demi-entières et des valeurs de μ quelconques (dans la manipulation le terme (-1)^μ disparaît</u> , comme suit :

$$Sachant\ que\ C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \quad \lambda \quad demi-entier$$

$$Et \quad P_\nu^\mu(z)=(-1)^\mu \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1+\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\mu)} \quad pour\ \mu\ entier \Rightarrow \frac{1}{2}-\lambda-\mu \quad entier$$

$$\Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=(-1)^\mu(-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}{(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}\frac{\Gamma(\nu+1-\mu)}{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\lambda-\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\lambda-\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z)=P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\mu=0\Rightarrow C_\nu^{\lambda,0}(z)=C_\nu^\lambda(z)=\sqrt{\pi}\frac{(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}(1-z)^{\frac{1}{2}-\lambda}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\lambda;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)}$$

Le développement qui suit n'est valable que pour <u>les valeurs de λ demi-entières et des valeurs de μ entières, à partir des fonctions de Legendre associées</u> , comme suit :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \quad et \quad P_\nu^\mu(z)=\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-\mu)}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2}+;\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}(1+z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda+\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z)=P_\nu^\mu(z)=(-1)^\mu\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1+\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\mu)}$$

$$\mu=0\Rightarrow C_\nu^{\lambda,0}(z)=C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\nu+1)}(1+z)^{\frac{1}{2}-\lambda}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\lambda;\frac{1-z}{2}\right)$$

Au passage la formule de développement hypergéométrique de la fonction de Legendre associée se déduit de celle de la fonction de Legendre en appliquant les règles de dérivation des fonctions hypergéométrique :

$$\begin{cases} \dfrac{d^m}{dz^m}\left\{ {}_2F_1(a,b\,;c\,;z)\right\} = \dfrac{(a)_m (b)_m}{(c)_m}\ {}_2F_1(a+m,b+m;c+m;z) \\ \dfrac{d^m}{dz^m}\left\{ z^{c-1}\ {}_2F_1(a,b\,;c\,;z)\right\} = (c-m)_m z^{c-1-m}\ {}_2F_1(a,b;c-m;z) \Rightarrow \dfrac{d^m}{dz^m}\left\{ {}_2F_1(a,b\,;1\,;z)\right\} = (1-m)_m z^{-m}\ {}_2F_1(a,b;1-m;z) \end{cases}$$

$$P_\nu(z) = {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1\,;1\,;\frac{1-z}{2}\right) \Rightarrow \frac{d^m}{dz^m}\{P_\nu(z)\} = \frac{(-1)^m}{2^m}(1-m)_m 2^m (1-z)^{-m}\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1\,;1-m\,;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$(1-m)_m = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \Rightarrow P_\nu^m(z) = (-1)^m\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m}\{P_\nu(z)\} = \frac{(1+z)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\ \frac{{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1\,;1-m\,;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-m)}$$

$$P_\nu(z) = {}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right) \Rightarrow \frac{d^m}{dz^m}\{P_\nu(z)\} = \frac{(-1)^m}{2^m}\frac{(-\nu)_m(\nu+1)_m}{(1)_m}\ {}_2F_1\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^m}{dz^m}\{P_\nu(z)\} = \frac{(-1)^m}{2^m}\frac{\Gamma(m-\nu)\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(1+m)\Gamma(\nu+1)}\ {}_2F_1\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^m}{dz^m}\{P_\nu(z)\} = \frac{1}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(1+m)}\ {}_2F_1\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_\nu^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^m}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\ \frac{{}_2F_1\left(-\nu+m,\nu+1+m;1+m;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+m)}$$

__Liaison avec les fonctions de Legendre associées d'ordre inverse et extension à un domaine des valeurs de λ et μ plus large (pour z € [-1,1])__

Toujours en supposant que λ est demi-entier et μ entier (par extension μ quelconque) , on peut également écrire :

$$P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\mu+\nu)}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

$$Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\mu+\nu)}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

Par extension cette expression a de bonne chance d'être valable quelque-soit μ ! A la seule condition que λ soit demi-entier, sinon la valeur devient alors complexe. Le cas λ=1/2 redonne bien les fonctions de Legendre associées (après avoir inversé l'ordre μ->-μ) :

$$C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z) = (-1)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z) \quad C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = (-1)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}Q_\nu^{-\mu}(z)$$

$$P_\nu^{-\mu}(z) = (-1)^\mu\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}P_\nu^\mu(z) \Rightarrow C_\nu^{\frac{1}{2},\mu}(z) = P_\nu^\mu(z) \quad Q_\nu^{-\mu}(z) = (-1)^\mu\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(z) \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = Q_\nu^\mu(z)$$

Et cela permet d'avoir donc deux expressions différentes des fonctions de Gegenbauer associées dont la première établie (que je redonne ici) est valable lorsque λ est quelconque et μ est entier :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Je tire une dernière liaison de la fonction associée de Gegenbauer de première espèce avec la fonction de Gegenbauer de première espèce dans le cas λ demi-entier :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma(\nu+1+\mu)}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1-\mu)}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\mu}{2}}C_{\nu+\mu}^{\frac{1}{2}-\mu}(z)\Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=\frac{\Gamma(1-\lambda-\mu)\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{2^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1-\mu)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}C_{2\lambda+\nu+\mu-1}^{1-\lambda-\mu}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{2^{1-2\lambda-\mu}}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(1-\lambda-\mu)\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1-\mu)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}C_{2\lambda+\nu+\mu-1}^{1-\lambda-\mu}(z)$$

<u>Le résultat important de cette petite section concerne donc les deux représentations des fonctions associées de Gegenbauer</u>

On a montré que ces deux expressions redonnaient les fonctions de Gegenbauer et les fonctions associées de Legendre au passage à la limite respective μ->0 et λ->1/2 :

$$\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\quad \mu\in\mathbf{N}\quad C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}\quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2}\quad p\in\mathbf{N}\quad C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\end{cases}$$

La fonction est également continue à l'intersection des deux domaines de valeurs des paramètres.

Mais la question de la définition des fonctions associées de Gegenbauer quelque-soient les valeurs de ν,μ et λ reste donc posée.

Quelques valeurs caractéristiques des fonctions associées de Gegenbauer de première espèce

On sait que pour la fonction de Gegenbauer de première espèce, les valeurs en z=0 et z=1 sont :

$$\begin{cases} C_\nu^{\lambda,0}(0) = \dfrac{2^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2}\right)\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)} \\ C_\nu^{\lambda,0}(1) = \dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)} = \dfrac{2^{1-2\lambda}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right)} \Leftarrow \dfrac{2^{1-2\lambda}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right)} = \dfrac{1}{\Gamma(2\lambda)} \end{cases}$$

Si maintenant on prend la valeur en z=0 de la fonction associées de Legendre :

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)} \Rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(0) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(0) = (-1)^\mu \frac{2^{1-2\lambda-\mu}\pi\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\dfrac{1-\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)}$$

$$Or \quad \frac{2^{1-2\lambda-\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{\nu+\mu+1}{2}\right)} = 2^\nu\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda\right) \Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(0) = (-1)^\mu \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\dfrac{1-\nu+\mu}{2}\right)}$$

Pour μ=0, on retrouve la valeur de la fonction de Gegenbauer de première espèce :

$$C_\nu^{\lambda,0}(0) = \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2}\right)\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\frac{2^{1-2\lambda}\pi\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{\nu+1}{2}\right)} = \frac{2^\nu\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2}\right)\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}$$

$$Car \quad \frac{2^{1-2\lambda}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{\nu+1}{2}\right)} = 2^\nu\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\lambda\right)$$

En z=1, la fonction associée de Legendre a un comportement plus complexe, ce qui induit un comportement limite de la fonction associée de Gegenbauer de première espèce :

$$\begin{cases} Si \quad \mu < 0 \quad P_\nu^\mu(1) = 0 \\ P_\nu^0(1) = 0 \\ Si \quad \mu = \{1,2,...\} \quad P_\nu^\mu(1) = 0 \\ \mu \notin \mathbf{N} \quad et \quad \Gamma(1-\mu) > 0 \quad P_\nu^\mu(1) = +\infty \\ \mu \notin \mathbf{N} \quad et \quad \Gamma(1-\mu) < 0 \quad P_\nu^\mu(1) = -\infty \\ Précisément \quad \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(x) = \dfrac{2^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(1-\mu)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(x) = \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)} \\ \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{-\frac{1-2\lambda}{4}+\frac{\mu}{2}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(x) = \dfrac{2^{-\frac{1-2\lambda}{4}+\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \in \mathbf{N} \quad \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{-\frac{\mu}{2}} C_\nu^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^\mu \dfrac{2^{1-2\lambda-\frac{\mu}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)} \\ \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{-\frac{1-2\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}} C_\nu^{\lambda,\mu}(x) = (-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)} \end{cases}$$

Lorsque nous introduirons les fonctions associées de Gegenbauer de type 2 pour x>1, nous verrons le comportement des limites correspondantes lorsque x tend vers 1.

<u>Lien des fonctions de Gegenbauer associées avec les fonctions de Jacobi</u>

On a vu dans le chapitre sur les fonctions de Jacobi « On the Cut », les liens existant avec les fonctions associées de Legendre :

$$P_\nu^{(\beta,\beta)}(z) = 2^\beta \left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} P_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)$$

$$P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} P_\nu^\beta(z)$$

$$Q_\nu^{(\beta,\beta)}(z) = 2^\beta \left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+2\beta+1)} Q_{\nu+\beta}^\beta(z) \Rightarrow Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-\beta} \left(1-z^2\right)^{+\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)$$

$$Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} \left\{\frac{\pi}{2} Sin(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(z) + Cos(\beta\,\pi) Q_\nu^\beta(z)\right\}$$

$$Q_\nu^{(\beta,-\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}} Q_\nu^\beta(z)$$

Ceci permet de déduire les liens entre les fonctions de Jacobi et les fonctions de Gegenbauer associées :

$$\beta = \lambda - \frac{1}{2} + \mu \quad -\beta = \frac{1}{2} - \lambda - \mu \quad \nu \to \nu - \mu \quad \nu + \beta \to \nu + \lambda - \frac{1}{2} \quad \nu + \beta + 1 \to \nu + \lambda + \frac{1}{2} \quad \nu + 1 \to \nu - \mu + 1$$

$$2\beta = 2\lambda - 1 + 2\mu \quad \nu + 2\beta \to \nu + 2\lambda - 1 + \mu \quad \frac{\beta}{2} = \frac{2\lambda - 1 + 2\mu}{4}$$

$$\Rightarrow P_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) = 2^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu} \left(1-z^2\right)^{-\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}} \frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \qquad Q_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z) = 2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \left(1-z^2\right)^{+\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}} \frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$\Rightarrow P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = 2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \left(1-z^2\right)^{+\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}} P_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) \qquad Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = 2^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} \left(1-z^2\right)^{-\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}} Q_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z)$$

Il vient finalement :

$$\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{2^{2\lambda-1+\mu}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}P_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}}Q_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z)\end{cases}$$

$$Et\quad \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)}\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{2^{\mu}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}P_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{2\lambda-1+\mu}\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}}Q_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z)\end{cases}$$

On retrouve bien les formules dans les deux cas soit λ=1/2, soit μ=0. Pour μ=0 c'est évident, pour λ=1/2, et μ entier il vient :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\mu}\Gamma(\nu+1)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(1-z^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}Q_{\nu+\mu}^{(-\mu,-\mu)}(z)\end{cases}$$

$$Or\quad P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=2^{\mu}\left(1-z^{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_{\nu}^{-\mu}(z)\quad Q_{\nu+\mu}^{(-\mu,-\mu)}(z)=2^{-\mu}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}Q_{\nu}^{-\mu}(z)$$

$$D'où\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_{\nu}^{-\mu}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}Q_{\nu}^{-\mu}(z)\end{cases}\quad \mu\quad entier\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=P_{\nu}^{\mu}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z)=Q_{\nu}^{\mu}(z)\end{cases}$$

Maintenant qu'obtient-on comme liens avec les fonctions de Jacobi à partir de l'expression, valable pour λ demi-entier et μ quelconque :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Les fonctions de Legendre associées correspondantes sont :

$$\begin{cases} P_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)=2^{-\beta}\left(1-z^2\right)^{+\frac{\beta}{2}}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}P_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z) \quad P_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)\rightarrow P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)=2^{\beta}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) \quad Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)\rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\beta=\lambda-\frac{1}{2}+\mu \quad \beta=\frac{1}{2}-\lambda-\mu \quad \nu+\beta\rightarrow\lambda+\nu-\frac{1}{2} \quad \nu\rightarrow\nu+2\lambda-1+\mu \quad \nu+2\beta\rightarrow\nu-\mu$$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=2^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}\left(1-z^2\right)^{+\frac{1-2\lambda-2\mu}{4}}\dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}P_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z) \\ Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1-2\lambda-2\mu}{4}}\dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}Q_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) \end{cases}$$

Ce qui donne les correspondances suivantes avec les fonctions de Jacobi :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{\mu}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}}P_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}Q_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{2\lambda-1+\mu}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}}P_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}}Q_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) \end{cases}$$

On retrouve les formules connues lorsque λ=1/2 et μ quelconque qui correspondent alors aux fonctions de Legendre associées, soit λ demi-entier et μ=0 correspondant aux fonctions de Gegenbauer.

En effet lorsque λ=1/2, il vient:

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = 2^{\mu} \dfrac{\Gamma(\nu+1+\mu)}{\Gamma(\nu+1)} \left(1-z^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_{\nu+\mu}^{(-\mu,-\mu)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = 2^{-\mu} \dfrac{\Gamma(\nu+1+\mu)}{\Gamma(\nu+1)} \left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}} Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z) \end{cases}$$

$$Or \quad P_{\nu+\mu}^{(-\mu,-\mu)}(z) = 2^{-\mu}\left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} P_{\nu}^{\mu}(z) \quad Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z) = 2^{\mu}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} Q_{\nu}^{\mu}(z)$$

$$D'où \Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = P_{\nu}^{\mu}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu}(z) = Q_{\nu}^{\mu}(z) \end{cases}$$

Et lorsque μ=0, il vient :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} 2^{\mu} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda-\mu}{2}} P_{\nu+2\lambda-1+\mu}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} 2^{-\mu} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)} \dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(1-z^2\right)^{\frac{\mu}{2}} Q_{\nu-\mu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,0}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} 2^{2\lambda-1} \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}} P_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,0}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)} Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z) \end{cases}$$

Ce qui est l'une des expressions des fonctions de Gegenbauer lorsque λ est demi-entier, que l'on a établit dans le chapitre sur les liens entre fonctions de Jacobi et Gegenbauer dans le cas où λ est demi-entier.

Les formules de liaisons entre les fonctions de Gegenbauer associées de première et deuxième espèce, pour les valeurs de λ demi-entières, par la transformation z->-z (pour z € [-1,1])

Les formules de liaisons entre fonctions de Gegenbauer associées se déduisent des liaisons sur les fonctions associées de Legendre établies dans le paragraphe précédent, valable quelque soit les valeurs réelles de μ et des valeurs de λ demi-entières:

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

En appliquant les liaisons sur les fonctions associées de Legendre :

$$P_\nu^\mu(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(z)+Q_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}\quad Q_\nu^\mu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(z)-P_\nu^\mu(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}$$

Il vient les formules de liaison suivantes :

$$\left.\begin{cases}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{Cos((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)+Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)}\\ Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{Cos((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)-P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)}\end{cases}\right\}\begin{array}{l}\lambda\quad demi-entier\Rightarrow\lambda=\dfrac{2p+1}{2}\\ \Rightarrow 2\lambda-1=2p\\ \Rightarrow Cos((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)=Cos((\nu+\mu)\pi)\\ \Rightarrow Sin((\nu+\mu+2\lambda-1)\pi)=Sin((\nu+\mu)\pi)\end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)-C_\nu^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}\end{cases}$$

Avec la formule valable pour des valeurs entières de μ et quelques-soient les valeurs de λ, on a :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Il vient les formules de liaison suivantes :

$$\begin{cases}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{Cos((\nu-\mu)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)+Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(-z)}{Sin((\nu-\mu)\pi)}\\ Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{Cos((\nu-\mu)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)-P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(-z)}{Sin((\nu-\mu)\pi)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{Cos((\nu-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu-\mu)\pi)}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{Cos((\nu-\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)-C_\nu^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu-\mu)\pi)}\end{cases}$$

Ces formules sont identiques au précédentes dans le cas μ entier. En effet :

$$\left.\begin{array}{l}\mu\ entier\Rightarrow\\ Cos((\nu-\mu)\pi)=Cos((\nu+\mu)\pi)\\ Sin((\nu-\mu)\pi)=Sin((\nu+\mu)\pi)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)-C_\nu^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)}\end{cases}$$

Extension des fonctions associées de Gegenbauer pour x> 1

Partant des fonctions associées de Legendre, on distingue communément dans le plan complexe z des fonctions de type 1 qui sont des fonctions définies originellement sur l'intervalle x €[-1,1] mais s'étendent à tout le plan complexe, et les fonctions de type 2 qui sont définies originellement partout dans le plan complexe sauf sur l'intervalle x€[-∞,+1] :

$$Notation \quad Type\,1 \quad P^{\mu}_{1,\nu}(z) \quad Type\,2 \quad P^{\mu}_{2,\nu}(z) \quad Type\,2 \quad Q^{\mu}_{1,\nu}(z) \quad Type\,2 \quad Q^{\mu}_{2,\nu}(z)$$

$$\begin{cases} P^{\mu}_{1,\nu}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)} \dfrac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \quad {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu, \dfrac{1-z}{2}\right) \\ P^{\mu}_{2,\nu}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)} \dfrac{(z+1)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} \quad {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu, \dfrac{1-z}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu \notin \mathbf{N} \qquad Q^{\mu}_{1,\nu}(z) = \dfrac{\pi}{2Sin(\mu\pi)}\left(Cos(\mu\pi) P^{\mu}_{1,\nu}(z) + \dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} P^{-\mu}_{1,\nu}(z)\right) \\ Q^{\mu}_{2,\nu}(z) = e^{i\mu\pi} \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)} z^{-\nu-\mu-1} (z+1)^{\frac{\mu}{2}} (z-1)^{\frac{\mu}{2}} \quad {}_2F_1\left(\dfrac{\nu+\mu+1}{2}, 1+\dfrac{\nu+\mu}{2}; \nu+\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{z^2}\right) \end{cases}$$

Les formules de liaisons existent entre ces fonctions de type 1 et 2 :

$$\begin{cases} P^{\mu}_{2,\nu}(z) = \dfrac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}} P^{\mu}_{1,\nu}(z) \\ Q^{\mu}_{2,\nu}(z) = e^{i\mu\pi} \dfrac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}} \left(Q^{\mu}_{1,\nu}(z) + \dfrac{\pi}{2Sin(\mu\pi)} \left(\dfrac{(1-z)^{\mu}}{(z-1)^{\mu}} - Cos(\mu\pi)\right) P^{\mu}_{1,\nu}(z)\right) \\ Q^{m}_{2,\nu}(z) = (-1)^{m} \dfrac{(z-1)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}} \left(Q^{m}_{1,\nu}(z) + \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}} P^{m}_{1,\nu}(z)\right) \end{cases}$$

Jusqu'à présent nous avons donc construit les fonctions associées de Gegenbauer de première espèce et de deuxième espèce sur x € [-1,1] de type 1 :

$$\lambda,\nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \quad C^{\lambda,\mu}_{1,\nu}(z) = (-1)^{\mu} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z) \quad C^{\lambda,\mu}_{1,(Q),\nu}(z) = (-1)^{\mu} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\begin{cases} \mu,\nu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \\ p \in \mathbf{N} \end{cases} \quad C^{\lambda,\mu}_{1,\nu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z) \quad C^{\lambda,\mu}_{1,(Q),\nu}(z) = (-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

Sur les principes :

- de continuité à l'intersection des deux domaines de valeurs : $\begin{cases} \lambda,\nu \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \\ \lambda,\mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \end{cases}$

- d'identité avec les fonctions de Gegenbauer lorsque μ->0
- d'identité avec les fonctions associées de Legendre lorsque λ->1/2

Notons tout d'abord que pour la fonction de Gegenbauer de première espèce (μ=0) sur [-1,1], le lien avec les fonctions associées de Legendre de type 1 et 2 n'implique pas la construction d'une fonction de Gegenbauer de type 1 et 2. En effet :

$$\begin{cases} C_\nu^\lambda(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z) \\ P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)=\dfrac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z) \end{cases} \to C_\nu^\lambda(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)$$

Toutefois pour μ≠0 il n'en est pas de même, ainsi même lorsque μ=0 pour la fonction de Gegenbauer de deuxième espèce : $Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)\neq\dfrac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}}(z)$*. Il convient donc bien d'introduire les deux types de fonctions associées de Gegenbauer, selon des modalités similaires tout en tenant compte que pour z>1, la relation entre les fonctions associées de Legendre de première espèce* ***<u>d'ordres opposés en signe</u>*** *sur ce domaine (type 2) est différente :*

$$\begin{cases} P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ Pour \quad \dfrac{1}{2}-\lambda-\mu\in\mathbf{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N} \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ \lambda,\mu\in\mathbf{R} \quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N} \quad C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Et pour les fonctions associées de Legendre de deuxième espèce d'ordre opposée :

$$\begin{cases} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=e^{-2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\mu+\nu)}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ \lambda=\dfrac{1}{2} \quad Q_{2,\nu}^{-\mu}(z)=e^{-2i\mu\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_{2,\nu}^{\mu}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N} \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ \lambda,\mu\in\mathbf{R} \quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N} \quad C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Je pense que ces deux formules dans les domaines respectifs de valeurs assurent :

- la continuité à l'intersection des deux domaines de valeurs $\begin{cases} \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N} \\ \lambda,\mu\in\mathbf{R} \quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N} \end{cases}$

- l'identité avec les fonctions de Gegenbauer lorsque μ->0
- l'identité avec les fonctions associées de Legendre lorsque λ->1/2

Il vient donc une construction des fonctions de type 1 et 2 pour les deux domaines de valeurs de la forme :

$$\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\\ \mu\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) & C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) & C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nu,\mu\in\mathbf{R}\\ \lambda=\dfrac{2p+1}{2}\\ p\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) & C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\\ C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) & C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\end{cases}$$

__Premier jeu de formules__

Avec le premier jeu de formules, la liaison entre les fonctions associées de Gegenbauer de première espèce de type 1 et 2 est la suivante :

$$\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\\ \mu\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

La formule de liaison entre les fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce de type 1 et 2, lorsque 1/2-λ-μ n'est pas un entier est plus complexe :

$$\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\\ \mu\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{-2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \quad C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\\ Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=e^{i\left(\frac{1-2\lambda}{2}-\mu\right)\pi}\dfrac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}\left(Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\dfrac{(1-z)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}}{(z-1)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\quad\mu\in\mathbf{N}\\ \dfrac{1}{2}-\lambda-\mu\notin\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi}\frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\frac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\frac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}}{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right)$$

Lorsque 1/2-λ-μ est un entier, la formule de liaison est la suivante :

$$\frac{1-2\lambda}{2}-\mu\in\mathbf{N}\Rightarrow Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}\frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}}}\left(Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}(z)+\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}(z)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda,\nu\in\mathbf{R}\quad\mu\in\mathbf{N}\\ \dfrac{1}{2}-\lambda-\mu\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right)$$

Cela redonne bien la formule de connexion des fonctions associées de Legendre de deuxième espèce :

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow Q_{2,\nu}^{\mu}(z) = \frac{(z-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{-\frac{\mu}{2}}}\left(Q_{1,\nu}^{\mu}(z) + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}P_{1,\nu}^{\mu}(z)\right) = \frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(Q_{1,\nu}^{\mu}(z) + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}P_{1,\nu}^{\mu}(z)\right)$$

La limite de la fonction de première espèce de type 2 en z=1 est la suivante :

$$\begin{cases} \lambda, \nu \in \mathbf{R} \\ \mu \in \mathbf{N} \end{cases} \rightarrow \quad \underset{x \to 1^+}{Lim} \quad (x-1)^{-\frac{\mu}{2}} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(x) = \frac{2^{1-2\lambda-\frac{\mu}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)}$$

Deuxième jeu de formules

Avec le deuxième jeu de formules, la liaison entre les fonctions associées de Gegenbauer de première espèce de type 1 et 2 est la suivante :

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\frac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

Lorsque μ+λ-1/2 n'est un entier, la formule de liaison entre les fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce de type 1 et 2 est la suivante :

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\frac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow\begin{cases} C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}-\mu\right)\pi}\frac{(z-1)^{-\left(\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-z)^{-\left(\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}\right)}}\left(Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)-\frac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\frac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N}\qquad \mu+\lambda-\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)-\frac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\frac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right)$$

Lorsque μ+λ-1/2 est un entier, la formule de liaison entre les fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce de type 1 et 2 est la suivante :

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\frac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow\begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\quad C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\quad C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)=(-1)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}\frac{(z-1)^{-\left(\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-z)^{-\left(\frac{1-2\lambda}{4}-\frac{\mu}{2}\right)}}\left(Q_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)+\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}P_{1,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\frac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N}\qquad \mu+\lambda-\frac{1}{2}\in\mathbf{N}\end{cases}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\frac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right)$$

On retrouve ainsi les formules de connexion pour les fonctions associées de Legendre de deuxième espèce :

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2} \quad \nu,\mu\in\mathbf{R}\rightarrow Q_{2,\nu}^{\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\dfrac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(Q_{1,\nu}^{\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2Sin(\mu\pi)}\left(\dfrac{(1-z)^{\mu}}{(z-1)^{\mu}}-Cos(\mu\pi)\right)P_{1,\nu}^{\mu}(z)\right) \\ \lambda=\dfrac{1}{2} \quad \nu\in\mathbf{R} \quad \mu=m\in\mathbf{N}\rightarrow Q_{2,\nu}^{m}(z)=(-1)^{m}\dfrac{(z-1)^{\frac{m}{2}}}{(1-z)^{\frac{m}{2}}}\left(Q_{1,\nu}^{m}(z)+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}P_{1,\nu}^{m}(z)\right) \end{cases}$$

La limite de la fonction de première espèce de type 2 en z=1 est la suivante :

$$\lambda=\frac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N} \quad \underset{x\rightarrow 1^{+}}{Lim} \quad (x-1)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1-2\lambda}{2}}C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(x)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)}$$

On peut donc résumer les résultats importants de cette section comme suit :

$$\begin{cases} \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N}\rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\dfrac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \\ \begin{cases} \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N} \\ \dfrac{1}{2}-\lambda-\mu\notin\mathbf{N} \end{cases} \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{-i\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\pi}\dfrac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\dfrac{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}}{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ \lambda,\nu\in\mathbf{R} \quad \mu\in\mathbf{N} \quad \dfrac{1}{2}-\lambda-\mu\in\mathbf{N}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\dfrac{(z-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N}\rightarrow C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\dfrac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z) \\ \begin{cases} \nu,\mu\in\mathbf{R} \\ \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \\ p\in\mathbf{N} \quad \mu+\lambda-\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{N} \end{cases} \rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\dfrac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)-\dfrac{\pi}{2Cos((\lambda+\mu)\pi)}\left(\dfrac{(1-z)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}{(z-1)^{\frac{2\lambda-1}{2}+\mu}}-Sin((\lambda+\mu)\pi)\right)C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ \nu,\mu\in\mathbf{R} \quad \lambda=\dfrac{2p+1}{2} \quad p\in\mathbf{N} \quad \mu+\lambda-\dfrac{1}{2}\in\mathbf{N}\rightarrow C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{i\mu\pi}\dfrac{(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\left(C_{1,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-1}}C_{1,\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \end{cases}$$

Construction des fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce dans le cas du paramètre ν et µ entier

Ces formules de liaisons permettent de construire les fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce, également dans le cas du paramètre ν et µ entier :

$$\begin{cases} C_\nu^{\lambda,\mu}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{\pi}{2}\frac{Cos((\nu+\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)-C_\nu^{\lambda,\mu}(-z)}{Sin((\nu+\mu)\pi)} \end{cases}$$

$$\nu = n \in \mathbf{N} \quad \mu = m \in \mathbf{N} \Rightarrow C_n^{\lambda,m}(-z) = (-1)^{n+m} C_n^{\lambda,m}(z)$$

Toutefois le dénominateur s'annule lorsque ν et µ prennent une valeur entière. Dans ce cas l'expression de la fonction de deuxième espèce présente une forme indéterminée 0/0 puisque :

$$C_n^{\lambda,m}(-z) = (-1)^{n+m} C_n^{\lambda,m}(z) \Rightarrow C_{(Q),n}^{\lambda,m}(z) = \frac{0}{0}$$

En utilisant la règle de l'hôpital et par passage à la limite pour les valeurs ν entières , il vient :

$$\nu = n \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z) = \frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{Cos((\nu+m)\pi)C_\nu^{\lambda,m}(z)-C_\nu^{\lambda,m}(-z)\right\}}{\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{Sin((\nu+m)\pi)\right\}}$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z) = \frac{1}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\left[Cos((\nu+m)\pi)\frac{\partial C_\nu^{\lambda,m}(z)}{\partial\nu}-\frac{\partial C_\nu^{\lambda,m}(-z)}{\partial\nu}\right]}{Cos((\nu+m)\pi)} \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{\partial C_\nu^{\lambda,m}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} - (-1)^{n+m}\left.\frac{\partial C_\nu^{\lambda,m}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}$$

Orthogonalité des fonctions associées de Gegenbauer de première espèce :

Les fonctions (polynômes) de Gegenbauer de première espèce sont orthogonales sur l'intervalle [-1,+1], comme il en résulte de l'orthogonalité des fonctions associées de Legendre :

$$\nu,\nu'\mu,\in\mathbf{N} \quad \int_{-1}^{+1} dz P_\nu^\mu(z)P_{\nu'}^\mu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{(2\nu+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}\partial_{\nu,\nu'} \Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)P_{\lambda+\nu'-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{(2\lambda+2\nu)\Gamma(2\lambda+\nu)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}\right)^2 \int_{-1}^{+1} dz(1-z^2)^{-\frac{1-2\lambda}{2}} C_\nu^\lambda(z)C_{\nu'}^\lambda(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{(2\lambda+2\nu)\Gamma(2\lambda+\nu)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_\nu^\lambda(z)C_{\nu'}^\lambda(z) = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{(\lambda+\nu)\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)^2}\partial_{\nu,\nu'}$$

Par conséquent en usant des mêmes types de relation, on en déduit une relation d'orthogonalité sur les fonctions de Gegenbauer associées de première espèce :

$$\int_{-1}^{+1} dz P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)P_{\lambda+\nu'-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = \frac{2\Gamma(\nu-\mu+1)}{(2\lambda+2\nu)\Gamma(2\lambda+\mu+\nu)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\right)^2 \int_{-1}^{+1} dz(1-z^2)^{-\frac{1-2\lambda}{2}} C_\nu^{\lambda,\mu}(z)C_{\nu'}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{2\Gamma(\nu-\mu+1)}{(2\lambda+2\nu)\Gamma(2\lambda+\mu+\nu)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_\nu^{\lambda,\mu}(z)C_{\nu'}^{\lambda,\mu}(z) = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{(\lambda+\nu)\Gamma(\nu-\mu+1)(\Gamma(\lambda))^2}\partial_{\nu,\nu'}$$

Annulation des fonctions associées de Gegenbauer de première espèce de degré ν et d'ordre μ entier

Étant donné la formule de Rodrigues $C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\partial^{\mu}C_{\nu}^{\lambda}(z)}{\partial z^{\mu}}$ *servant à la construction de ces fonctions, comme la fonction de Gegenbauer de degré ν est un polynôme du même degré, on en déduit que pour μ> ν :* $\nu,\mu\in\mathbf{N}\quad C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=0\quad \mu>\nu$ *.*

Fonctions associées de Gegenbauer de deuxième espèce non définie lorsque ν+μ est un entier négatif

Avec les domaines de valeurs des paramètres ν, μ et λ, lorsque μ est entier :

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Dans ces conditions la fonction associée de Legendre de deuxième espèce est non définie lorsque :

$$\frac{1}{2}-\lambda-\mu+\lambda+\nu-\frac{1}{2}=\nu-\mu<0\Rightarrow\begin{cases}\nu,\mu\in\mathbf{N}\\ \nu<\mu\end{cases}$$

Lorsque λ est demi-entier, alors d'après la définition :

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

la fonction associée de Legendre de deuxième espèce est non définie lorsque :

$$\lambda-\frac{1}{2}+\mu+\lambda+\nu-\frac{1}{2}=\mu+\nu+2\lambda-1\Rightarrow\begin{cases}\mu+\nu+2\lambda-1\in\mathbf{N}\\ \mu+\nu+2\lambda-1<0\end{cases}$$

Transformation des paramètres ν->-ν-2λ, μ->-μ, μ->-μ+1-2λ sur les fonctions associées de Gegenbauer de première et deuxième espèce

Transformation ν->- ν-2λ

Etant donné la relation connue spécifique aux fonctions de Gegenbauer :

$$C_\nu^\lambda(z) = -\frac{Sin(\pi\,\nu)}{Sin(\pi\,(2\lambda+\nu))} C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z)$$

Que l'on peut démontrer à partir de la formule de définition de la fonction de Gegenbauer :

$$C_\nu^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

comme suit :

$$P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = C_\nu^\lambda(z)\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}$$

$$\Rightarrow C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-2\lambda+2\lambda)}{\Gamma(-\nu-2\lambda+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{-\lambda-\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-2\lambda+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{-\lambda-\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$= \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-2\lambda+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z) = \frac{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\nu-2\lambda+1)\Gamma(\nu+2\lambda)} C_\nu^\lambda(z)$$

$$= -\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_\nu^\lambda(z)$$

$$\Leftrightarrow C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z) = -\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_\nu^\lambda(z)$$

Cette relation n'a de sens que lorsque le degré ν n'est pas un entier. Si en revanche le degré ν est entier alors il convient que le paramètre λ soit un demi-entier . En passant à la limite sur la fraction des sinus, il vient : $\nu \in N \quad 2\lambda = 2p+1 \quad p \in N \Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = (-1)^{2\lambda-1} C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z) = C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z)$.

Donc : $\nu \in N \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in N \Rightarrow C_\nu^\lambda(z) = C_{-\nu-2\lambda}^\lambda(z)$ *. Pour ce qui est de la fonction de Gegenbauer associées, étant donnée la construction par dérivation de Rodriges, il vient immédiatement une formule similaire :*

$$\nu \in N \quad \lambda = \frac{2p+1}{2} \quad p \in N \Rightarrow C_\nu^{\lambda,m}(z) = C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,m}(z)$$

En prenant la définition de la fonctions associée de Gegenbauer de première espèce pour μ entier :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

On parvient à la relation pour μ entier :

$$C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-\nu+\mu)}{\Gamma(-\nu-2\lambda-\mu+1)}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda+\mu))}{Sin(\pi(\mu-\nu))}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=-\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

Qu'en est-il de la fonction associée de Gegenbauer de deuxième espèce ? Partons des définitions initiales pour μ entier :

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Il vient alors toujours pour μ entier :

$$C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-2\lambda+\mu+2\lambda)}{\Gamma(-\nu-2\lambda-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda-\nu-2\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+\mu)}{\Gamma(-\nu-2\lambda-\mu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$Or\quad Q_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{\pi\,Cos\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)\pi\right)Cos\left(\left(\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)-Sin\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu+\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)}{Sin\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\nu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}$$

$$\Rightarrow Q_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{\pi\,Sin((\lambda+\mu)\pi)Sin((\nu+\lambda)\pi)P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)-Sin((\nu-\mu)\pi)Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)}{Sin((2\lambda+\mu+\nu)\pi)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-\nu+\mu)}{\Gamma(-\nu-2\lambda-\mu+1)}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\frac{\pi\,Sin((\lambda+\mu)\pi)Sin((\nu+\lambda)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)-Sin((\nu-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((2\lambda+\mu+\nu)\pi)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\pi\,Sin((\lambda+\mu)\pi)Sin((\nu+\lambda)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)-Sin((\nu-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)}=\frac{-\pi\,Sin(\lambda\pi)Sin((\nu+\lambda)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)+Sin(\nu\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin(\nu\pi)}$$

Si maintenant on part de la définition alternative valable pour les valeurs de λ demi-entières

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Il vient :

$$C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) = C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

$$C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)$$

$$Or \quad Q_{-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) = \frac{\pi\, Cos\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi\right) Cos\left(\left(\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right) P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) - Sin((\mu+\nu+2\lambda-1)\pi) Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{\pi\, Cos\left(\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right) Cos\left(\left(\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right) C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin((\mu+\nu+2\lambda-1)\pi) C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{\pi\, Cos(\mu\,\pi) Cos(\nu\,\pi) C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin((\mu+\nu)\pi) C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)}$$

Les résultats sur les fonctions associées de Gegenbauer de première et deuxième espèce se résument donc ainsi pour certains des domaines de valeurs des paramètres ν, μ et λ:

$$\begin{cases} \nu,\lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,m}(z) = -\dfrac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_{\nu}^{\lambda,m}(z) \\ \nu,\mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,m}(z) = C_{\nu}^{\lambda,m}(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu,\lambda \in \mathbf{R} \quad m \in \mathbf{N} \quad C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,m}(z) = \dfrac{-\pi\, Sin(\lambda\,\pi) Sin((\nu+\lambda)\pi) C_{\nu}^{\lambda,m}(z) + Sin(\nu\,\pi) C_{(Q),\nu}^{\lambda,m}(z)}{Sin(\nu\pi)} \\ \nu,\mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \quad C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{\pi\, Cos(\mu\,\pi) Cos(\nu\,\pi) C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin((\mu+\nu)\pi) C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)} \end{cases}$$

Ces deux jeux de formules n'en forme plus qu'un seul :

$$\begin{cases} \nu,\lambda \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{N} \\ \nu,\mu \in \mathbf{R} \quad \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \quad p \in \mathbf{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = -\dfrac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) \\ C_{(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{\pi\, Sin((\mu+\lambda)\,\pi) Sin((\nu+\lambda)\pi) C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin((\mu+\nu)\pi) C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin((\mu-\nu)\pi)} \end{cases}$$

Pour l'effet de la transformation ν->-ν-2λ sur les fonctions de type 2, utilisons les constructions suivantes :

$$\lambda,\nu \in \mathbf{R} \qquad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = e^{2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \end{cases}$$

$$\nu,\mu \in \mathbf{R} \qquad \lambda = \frac{2p+1}{2} \qquad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Les formules de connexion pour les fonctions associées de Legendre pour la transformation ν->-ν-1 sont les suivantes :

$$P_{2,-\nu-1}^{\mu}(z) = P_{2,\nu}^{\mu}(z)$$

$$Q_{2,-\nu-1}^{\mu}(z) = \frac{\pi\, e^{i\mu\pi} Cos(\nu\pi) P_{2,\nu}^{\mu}(z) - Sin(\pi(\mu+\nu)) Q_{2,\nu}^{\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} \Rightarrow \mu = m \in \mathbf{N} \qquad Q_{2,-\nu-1}^{m}(z) = Q_{2,\nu}^{m}(z) - \pi \frac{Cos(\nu\pi)}{Sin(\nu\pi)} P_{2,\nu}^{m}(z)$$

Alors pour les fonctions de première espèce de type 2 :

$$\lambda,\nu \in \mathbf{R} \qquad \mu \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \frac{Sin(\pi(\nu+\mu+2\lambda))}{Sin(\pi(\mu-\nu))} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = -\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

$$\nu,\mu \in \mathbf{R} \qquad \lambda = \frac{2p+1}{2} \qquad p \in \mathbf{N} \rightarrow C_{2,-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) = -\frac{Sin(\pi(\nu+2\lambda))}{Sin(\pi\nu)} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

Et pour les fonctions de deuxième espèce :

$$\begin{cases} \lambda,\nu \in \mathbf{R} \\ \mu \in \mathbf{N} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_{2,(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{Sin(\pi(\nu+2\lambda+\mu))}{Sin(\pi(\mu-\nu))} e^{2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \dfrac{\Gamma(\nu+2\lambda+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \leftarrow Q_{2,-\nu-\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) + Sin(\pi(\mu-\nu)) Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)}{Sin(\pi(2\lambda+\mu+\nu))} \\ C_{2,(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) + Sin(\pi(\mu-\nu)) C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin(\pi(\mu+\nu)) C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu,\mu \in \mathbf{R} \\ \lambda = \dfrac{2p+1}{2} \\ p \in \mathbf{N} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_{2,(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{2,-\lambda-\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \leftarrow Q_{2,-\lambda-\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) + Sin(\pi(2\lambda+\mu+\nu)) Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} \\ C_{2,(Q),-\nu-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z) = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) + Sin(\pi(2\lambda+\mu+\nu)) C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} = \dfrac{\pi\, e^{i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi} Sin((\lambda+\nu)\pi) C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z) - Sin(\pi(\mu+\nu)) C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))} \end{cases}$$

Transformations μ->-μ, μ->-μ+1-2λ

Toujours dans l'hypothèse où le paramètre μ entier, l'opération μ en -μ+1-2λ impose que λ soit un demi-entier au stade actuelle de cette étude. En effet supposons μ entier et λ réel quelconque alors la fonction correspondante est définie pour -μ+1-2λ qui est un réel quelconque mais alors λ doit être un demi-entier. Si maintenant μ est réel alors -μ+1-2λ est réel et λ reste toujours un demi-entier.

Partons de la première expression de la fonction associée de Gegenbauer, alors la transformation μ en -μ donne :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \Rightarrow C_\nu^{\lambda,-\mu}(z)=(-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+\mu}(z)$$

Idem pour $C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)$

$$Or\quad\begin{cases} P_\nu^{-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Cos(\mu\pi)P_\nu^\mu(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)\right) \\ \to P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu-\mu)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda-\mu)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)\right) \\ Q_\nu^{-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Cos(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\mu\pi)P_\nu^\mu(z)\right) \\ \to Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda+\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu-\mu)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)-\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda-\mu)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_\nu^{\lambda,-\mu}(z)=(-1)^\mu\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda-\mu)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)\right) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu}(z)=(-1)^\mu\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)-\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda-\mu)\pi)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)\right) \end{cases}$$

$$Comme\quad\begin{cases} C_\nu^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+1+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+2\lambda)}(-1)^\mu\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}(z)\leftarrow(-1)^{2\lambda-1}=1 \\ Idem\ pour\quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_\nu^{\lambda,-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)+\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)\right) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda-\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_\nu^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\left(Sin((\lambda+\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)-\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\left(Sin((\lambda+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda+\mu)\pi)C_\nu^{\lambda,\mu}(z)\right) \end{cases}$$

La portée de la formule est nécessairement plus limitée car en tenant compte de μ entier et λ un demi-entier, il vient :

$$Cos((\lambda+\mu)\pi)=0 \Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=(-1)^{\mu}\,Sin(\lambda\,\pi)\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=(-1)^{\mu}\,Sin(\lambda\,\pi)\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) \end{cases}$$

En partant cette fois de la deuxième formulation de la fonction associée de Gegenbauer :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,-\mu}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}-\mu}(z) \qquad \textit{Idem pour} \quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(2\lambda+\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)-\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)\right) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(2\lambda+\nu-\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(Sin((\lambda-\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)+\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda-\mu)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu-(2\lambda-1)}(z)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\left(Sin((\lambda+\mu)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}Cos((\lambda+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\left(Sin((\lambda+\mu)\pi)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)-\dfrac{\pi}{2}Cos((\lambda+\mu)\pi)C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \end{cases}$$

Formules qui sont au moins valable pour λ demi-entier et μ et ν quelconques.

L'effet de la transformation μ->-μ+1-2λ sur les fonctions associées de Gegenbauer de type 2 est obtenu en considérant la transformation μ->-μ sur les fonctions associées de Legendre de type 2.

Utilisons les constructions définies précédemment :

$$\lambda,\nu\in\mathbf{R} \qquad \mu\in\mathbf{N}\rightarrow \begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=e^{2i\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu\right)\pi}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z) \end{cases}$$

$$\nu,\mu\in\mathbf{R} \qquad \lambda=\frac{2p+1}{2} \qquad p\in\mathbf{N}\rightarrow \begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(z^2-1\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \end{cases}$$

Les formules de connexion pour les fonctions associées de Legendre pour la transformation μ->-μ sont les suivantes :

$$\begin{cases} P_{2,\nu}^{-\mu}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left(P_{2,\nu}^{\mu}(z)-\dfrac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}Sin(\pi\ \mu)Q_{2,\nu}^{\mu}(z)\right) \\ Q_{2,\nu}^{-\mu}(z)=e^{-2i\mu\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_{2,\nu}^{\mu}(z) \end{cases}$$

Cela donne :

$$P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}\left(P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)-\frac{2}{\pi}e^{-i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}Sin\left(\pi\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\right)Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z)\right)$$

$$P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(z)=\frac{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left(P_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\lambda-\mu+\frac{1}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}e^{-i\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)\pi}Sin\left(\pi\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\right)Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)\right)$$

$$Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)=e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \qquad Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda+\mu-\frac{1}{2}}(z)=e^{2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}Q_{2,\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{-\lambda-\mu+\frac{1}{2}}(z)$$

$$\lambda,\nu\in\mathbf{R} \qquad \mu\in\mathbf{N}\rightarrow\begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}\left(C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}e^{-i\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi}Cos(\pi\ (\lambda+\mu))C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}\right) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu} \end{cases}$$

$$\nu,\mu\in\mathbf{R} \qquad \lambda=\frac{2p+1}{2} \qquad p\in\mathbf{N}\rightarrow\begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}\left(C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}e^{-i\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi}Cos(\pi\ (\lambda+\mu))C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu} \end{cases}$$

Ce qui peut se résumer par un unique jeu de formules :

$$\lambda,\nu\in\mathbf{R} \qquad \mu\in\mathbf{N} \qquad ou \qquad \nu,\mu\in\mathbf{R} \qquad \lambda=\frac{2p+1}{2} \qquad p\in\mathbf{N}$$

$$\rightarrow\begin{cases} C_{2,\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}\left(C_{2,\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\dfrac{2}{\pi}e^{-i\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi}Cos(\pi\ (\lambda+\mu))C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z)\right) \\ C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,-\mu+1-2\lambda}(z)=e^{-2i\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)\pi}\dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(2\lambda+\nu+\mu)}C_{2,(Q),\nu}^{\lambda,\mu} \end{cases}$$

Annulation des fonctions associées de Gegenbauer de première espèce selon certains domaine de valeurs des paramètres v et μ entiers et λ demi-entier

En ce qui concerne l'annulation des fonctions associées de Gegenbauer de première espèce selon certains domaine de valeurs des paramètres v et μ lorsqu'ils sont entiers, et λ demi-entier. Prenons l'exemple des fonctions associées de Legendre, il vient :

$$v,\mu \in \mathbf{N} \quad P_v^{\mu}(z)=0 \quad \mu > v \Rightarrow P_{-v-1}^{\mu}(z)=0 \quad \mu > v \Leftrightarrow -\mu-1 < -v-1 \Rightarrow P_v^{\mu}(z)=0 \quad -\mu \le v < \mu$$

Par « analogie » pour les fonctions associées de Gegenbauer, en combinant la formule d'annulation et de changement de signe de μ :

$$\begin{aligned} & v,\mu \in \mathbf{N} \quad C_v^{\lambda,\mu}(z)=0 \quad \mu > v \qquad C_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=0 \quad \mu > v \\ & \Rightarrow C_{-v-2\lambda}^{\lambda,\mu}(z)=0 \quad -\mu-2\lambda < -v-2\lambda \quad \widetilde{v}=-v-2\lambda \Leftrightarrow -\mu-(2\lambda-1) \le \widetilde{v} \\ & \Rightarrow C_v^{\lambda,\mu}(z)=0 \quad -\mu-(2\lambda-1) \le v < \mu \end{aligned}$$

On démontre que la fonction associée de Gegenbauer de première espèce est identiquement nulle.

Formules de récurrence des fonctions de Gegenbauer associées de première espèce et d'ordre m entier

A partir de la formule définissant les fonctions de Gegenbauer associées de première espèce avec les fonctions de Gegenbauer : $C_\nu^{\lambda,m}(z)=(-1)^m 2^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$*, sachant la formule de récurrence des fonctions de Gegenbauer :* $(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)$*, on en déduit la relation de récurrence recherchée :*

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)=2(\lambda+\nu)\,z\,C_\nu^\lambda(z)-(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^\lambda(z)$$
$$\Rightarrow (\nu+1-m)C_{\nu+1-m}^{\lambda+m}(z)=2(\lambda+m+\nu-m)\,z\,C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)-(2\lambda+2m+\nu-m-1)C_{\nu-m-1}^{\lambda+m}(z)$$
$$\Rightarrow (\nu+1-m)C_{\nu+1-m}^{\lambda+m}(z)=2(\lambda+\nu)\,z\,C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)-(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-m-1}^{\lambda+m}(z)$$
$$\Rightarrow C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)=(-1)^m 2^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left\{\frac{2(\lambda+\nu)\,z\,C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)-(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-m-1}^{\lambda+m}(z)}{(\nu+1-m)}\right\}$$
$$\Rightarrow (\nu+1-m)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)=2(\lambda+\nu)\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)$$

Soit donc la formule de récurrence entre plus proches voisins :

$$(\nu+1-m)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)=2(\lambda+\nu)\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)$$

On peut également combiner cette formule de récurrence comme suit :

$$z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)=\frac{(\nu+1-m)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu)}$$

Avec l'argument z au carré, cela donne :

$$z\,C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)=\frac{(\nu+2-m)C_{\nu+2}^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu)C_\nu^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu+1)}$$
$$z\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)=\frac{(\nu-m)C_\nu^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu-2)C_{\nu-2}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu-1)}$$
$$z^2\,C_\nu^{\lambda,m}(z)=\frac{(\nu+1-m)zC_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu-1)zC_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{2(\lambda+\nu)}$$
$$=\frac{(\nu+1-m)\dfrac{(\nu+2-m)C_{\nu+2}^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu)C_\nu^{\lambda,m}(z)}{(\lambda+\nu+1)}+(2\lambda+m+\nu-1)\dfrac{(\nu-m)C_\nu^{\lambda,m}(z)+(2\lambda+m+\nu-2)C_{\nu-2}^{\lambda,m}(z)}{(\lambda+\nu-1)}}{4(\lambda+\nu)}$$
$$\Rightarrow z^2\,C_\nu^{\lambda,m}(z)=\frac{\left\{\begin{array}{l}(\nu+1-m)(\lambda+\nu-1)(\nu+2-m)C_{\nu+2}^{\lambda,m}(z)+\\+(2\lambda+m+\nu-2)(2\lambda+m+\nu-1)(\lambda+\nu+1)C_{\nu-2}^{\lambda,m}(z)\\+\left[(\nu+1-m)(\lambda+\nu-1)(2\lambda+m+\nu)+(2\lambda+m+\nu-1)(\lambda+\nu+1)(\nu-m)\right]C_\nu^{\lambda,m}(z)\end{array}\right\}}{4(\lambda+\nu)(\lambda+\nu-1)(\lambda+\nu+1)}$$

Cette expression est assez longue mais elle peut parfois servir.

Formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer associées de première espèce et d'ordre m entier

A partir des diverses formules de dérivation des fonctions de Gegenbauer de première espèce :

$$(1)\quad \nu\, C_\nu^\lambda(z) = zC_\nu^\lambda{}'(z) - C_{\nu-1}^\lambda{}'(z)$$
$$(2)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z) - C_{\nu-1}^\lambda{}'(z) = (2\lambda + 2\nu)C_\nu^\lambda(z)$$
$$(3)\quad C_{\nu+1}^\lambda{}'(z) - zC_\nu^\lambda{}'(z) = (2\lambda + \nu)C_\nu^\lambda(z)$$
$$(4)\quad (z^2-1)C_\nu^\lambda{}'(z) = \nu\, z\, C_\nu^\lambda(z) - (2\lambda - 1 + \nu)C_{\nu-1}^\lambda(z)$$
$$(5)\quad (z^2-1)C_\nu^\lambda{}'(z) = (\nu+1)C_{\nu+1}^\lambda(z) - (2\lambda + \nu)zC_\nu^\lambda(z)$$
$$(6)\quad C_\nu^\lambda{}'(z) = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)$$

Et de la liaison avec les fonctions de Gegenbauer : $C_\nu^{\lambda,m}(z) = (-1)^m 2^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$*, il vient pour la formule (6) :*

$$(6)\quad C_\nu^\lambda{}'(z) = 2\lambda C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)$$
$$C_\nu^{\lambda,m}{}'(z) = (-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(-m\, z\,(1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z) + (1-z^2)^{\frac{m}{2}} C_{\nu-m}^{\lambda+m}{}'(z)\right)$$
$$= (-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(-m\, z\,(1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z) + (1-z^2)^{\frac{m}{2}} 2(\lambda+m) C_{\nu-m-1}^{\lambda+m+1}(z)\right)$$
$$= \left(-\frac{m\,z}{1-z^2}(-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}} C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z) + 2(\lambda+m)\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+m)}(-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\lambda+1+m)}{\Gamma(\lambda+1)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}} C_{\nu-m-1}^{\lambda+m+1}(z)\right)$$
$$\Rightarrow (6')\quad C_\nu^{\lambda,m}{}'(z) = -\frac{m\,z}{1-z^2} C_\nu^{\lambda,m}(z) + 2\lambda\, C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)$$

On peut en déduire une formule pour la dérivée seconde, et cela nous permet de vérifier numériquement le respect de l'équation différentielle de la fonction de Gegenbauer associées :

$$C_\nu^{\lambda,m}{}''(z) = 2\lambda\, C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}{}'(z) - m\left(\frac{z}{1-z^2} C_\nu^{\lambda,m}(z)\right)' = 2\lambda\left(-\frac{m\,z}{1-z^2} C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z) + 2(\lambda+1) C_{\nu-2}^{\lambda+2,m}(z)\right) - m\left(\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2} C_\nu^{\lambda,m}(z) + \frac{z}{1-z^2} C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)\right)$$
$$= -2\lambda\, m \frac{z}{1-z^2} C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z) + 4\lambda(\lambda+1) C_{\nu-2}^{\lambda+2,m}(z) - m\left(\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2} C_\nu^{\lambda,m}(z) + \frac{z}{1-z^2}\left(-\frac{m\,z}{1-z^2} C_\nu^{\lambda,m}(z) + 2\lambda\, C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)\right)\right)$$
$$= -4\lambda\, m \frac{z}{1-z^2} C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z) + 4\lambda(\lambda+1) C_{\nu-2}^{\lambda+2,m}(z) - m\frac{1+z^2-mz^2}{(1-z^2)^2} C_\nu^{\lambda,m}(z)$$

D'où la dérivée seconde :

$$(6'')\quad C_\nu^{\lambda,m}{}''(z) = 4\lambda(\lambda+1) C_{\nu-2}^{\lambda+2,m}(z) - 4\lambda\, m \frac{z}{1-z^2} C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z) + m\frac{(m-1)z^2-1}{(1-z^2)^2} C_\nu^{\lambda,m}(z)$$

Avec ces deux expressions j'ai testé numériquement le respect de l'équation différentielle des fonctions associées de Gegenbauer :

$$\left(1-z^2\right)C_\nu^{\lambda,\mu}{}''(z)-(2\lambda+1)z\,C_\nu^{\lambda,\mu}{}'(z)+\left\{\nu(\nu+2\lambda)-\frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{1-z^2}\right\}C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=0$$

Prenons maintenant la formule (4) : $(4)\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda}{}'(z)=\nu\,z\,C_\nu^{\lambda}(z)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)$*, il vient :*

$$\begin{aligned}
&(4)\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda}{}'(z)=\nu\,z\,C_\nu^{\lambda}(z)-(2\lambda-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)\\
&\left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=m\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)+(-1)^m2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(z^2-1\right)C_{\nu-m}^{\lambda+m}{}'(z)\\
&\Rightarrow \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=m\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)+(\nu-m)z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+m-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\\
&\Rightarrow (4')\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=\nu\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+m-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)
\end{aligned}$$

Ainsi que la formule (5) : $(5)\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda}{}'(z)=(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-(2\lambda+\nu)zC_\nu^{\lambda}(z)$ *alors :*

$$\begin{aligned}
&(5)\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda}{}'(z)=(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-(2\lambda+\nu)zC_\nu^{\lambda}(z)\\
&\Rightarrow \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=m\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)+(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+\nu+m)zC_\nu^{\lambda,m}(z)\\
&\Rightarrow (5')\quad \left(z^2-1\right)C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+\nu)\,z\,C_\nu^{\lambda,m}(z)
\end{aligned}$$

La formule $(1)\quad \nu\,C_\nu^{\lambda}(z)=zC_\nu^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}{}'(z)$ *donne :*

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \nu\,C_\nu^{\lambda}(z)=zC_\nu^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}{}'(z)\\
&\Rightarrow\begin{cases} z\,C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z^2}{z^2-1}\,C_\nu^{\lambda,m}(z)+(-1)^m2^m\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}zC_{\nu-m}^{\lambda+m}{}'(z)\\ C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z}{z^2-1}\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m2^m\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}C_{\nu-1-m}^{\lambda+m}{}'(z)\end{cases}\\
&\Rightarrow z\,C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\frac{z^2}{z^2-1}\,C_\nu^{\lambda,m}(z)-m\,\frac{z}{z^2-1}\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(zC_{\nu-m}^{\lambda+m}{}'(z)-C_{\nu-1-m}^{\lambda+m}{}'(z)\right)\\
&\Rightarrow z\,C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=\left(\nu-\frac{m}{1-z^2}\right)C_\nu^{\lambda,m}(z)-m\,\frac{z}{z^2-1}\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\\
&\Rightarrow \left(\nu-\frac{m}{1-z^2}\right)C_\nu^{\lambda,m}(z)-m\,\frac{z}{z^2-1}\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)=z\,C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)\\
&\Rightarrow (1')\quad \frac{\left(\nu\left(1-z^2\right)-m\right)C_\nu^{\lambda,m}(z)+m\,z\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{1-z^2}=z\,C_\nu^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)
\end{aligned}$$

La formule $(2)\quad C_{\nu+1}^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}{}'(z)=2(\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda}(z)$ *donne :*

$$(2)\quad C_{\nu+1}^{\lambda}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}{}'(z)=2(\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z}{z^2-1}\,C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m 2^m\,\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\,C_{\nu+1-m}^{\lambda+m}{}'(z) \\ C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z}{z^2-1}\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m 2^m\,\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\,C_{\nu-1-m}^{\lambda+m}{}'(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2')\quad C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\frac{z}{z^2-1}\left(C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\right)+2(\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)$$

Et finalement la formule $(3)\quad C_{\nu+1}^{\lambda}{}'(z)-zC_{\nu}^{\lambda}{}'(z)=(2\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda}(z)$ *donne :*

$$(3)\quad C_{\nu+1}^{\lambda}{}'(z)-zC_{\nu}^{\lambda}{}'(z)=(2\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z}{z^2-1}\,C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m 2^m\,\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\,C_{\nu+1-m}^{\lambda+m}{}'(z) \\ z\,C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\dfrac{z^2}{z^2-1}\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)+(-1)^m 2^m\,\dfrac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\,zC_{\nu-m}^{\lambda+m}{}'(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3')\quad C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=\left(2\lambda+\nu+m\,\frac{1}{1-z^2}\right)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-m\,\frac{z}{1-z^2}\,C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)$$

D'où les 6 formules suivantes liant les dérivées premières de la fonction associées de Gegenbauer de première espèce :

$$(1')\quad \frac{\left(\nu(1-z^2)-m\right)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)+m\,z\,C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)}{1-z^2}=z\,C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)$$

$$(2')\quad C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}{}'(z)=m\,\frac{z}{z^2-1}\left(C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\right)+2(\lambda+\nu)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)$$

$$(3')\quad C_{\nu+1}^{\lambda,m}{}'(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=\left(2\lambda+\nu+m\,\frac{1}{1-z^2}\right)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-m\,\frac{z}{1-z^2}\,C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)$$

$$(4')\quad (z^2-1)C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=\nu\,z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+m-1+\nu)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)$$

$$(5')\quad (z^2-1)C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-(2\lambda+\nu)\,z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)$$

$$(6')\quad C_{\nu}^{\lambda,m}{}'(z)=-\frac{m\,z}{1-z^2}\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)+2\lambda\,C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)$$

Formules de liaison des fonctions de Gegenbauer associées de première espèce et d'ordre m entier avec des paramètres λ ascendants

Les formules suivantes pour les fonctions de Gegenbauer de première espèce sont valables :

$$(1)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)=\frac{2(\lambda-1)}{(\nu+2\lambda-1)}\left(C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda}(z)\right)$$

$$(2)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)=\frac{2(\lambda-1)}{(\nu+1)}\left(z\,C_{\nu}^{\lambda}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}(z)\right)$$

$$(3)\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)=\frac{z(\nu+2\lambda)C_{\nu}^{\lambda}(z)-(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

$$(4)\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)=\frac{(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)-z\nu\,C_{\nu}^{\lambda}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

Toujours partant de la liaison : $C_{\nu}^{\lambda,m}(z)=(-1)^m 2^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{\nu-m}^{\lambda+m}(z)$*, il vient :*

$$(1)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)=\frac{2(\lambda-1)}{(\nu+2\lambda-1)}\left(C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda}(z)\right)$$

$$C_{\nu+1}^{\lambda-1,m}(z)=(-1)^m 2^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\lambda-1+m)}{\Gamma(\lambda-1)}C_{\nu-m+1}^{\lambda+m-1}(z)=\frac{2(\lambda+m-1)}{(\nu+2\lambda+m-1)}\frac{\Gamma(\lambda-1+m)}{\Gamma(\lambda-1)}\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+m)}\left(C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)\right)$$

$$(1')\Rightarrow C_{\nu+1}^{\lambda-1,m}(z)=\frac{2(\lambda+m-1)}{(\nu+2\lambda+m-1)}\frac{\lambda-1}{\lambda-1+m}\left(C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)\right)$$

$$(2)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)=\frac{2(\lambda-1)}{(\nu+1)}\left(z\,C_{\nu}^{\lambda}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda}(z)\right)\Rightarrow(2')\Rightarrow C_{\nu+1}^{\lambda-1,m}(z)=\frac{2(\lambda+m-1)}{(\nu-m+1)}\frac{\lambda-1}{\lambda-1+m}\left(z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\right)$$

$$(3)\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)=\frac{z(\nu+2\lambda)C_{\nu}^{\lambda}(z)-(\nu+1)C_{\nu+1}^{\lambda}(z)}{2(1-z^2)\lambda}\Rightarrow(3')\Rightarrow C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)=\frac{z(\nu+m+2\lambda)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

$$(4)\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1}(z)=\frac{(2\lambda+\nu-1)C_{\nu-1}^{\lambda}(z)-z\nu\,C_{\nu}^{\lambda}(z)}{2(1-z^2)\lambda}\Rightarrow(4')\Rightarrow C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)=\frac{(\nu+m+2\lambda-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)-z(\nu-m)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

Soit les 4 formules suivantes :

$$(1)\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1}(z)=\frac{2(\lambda-1)}{(\nu+2\lambda-1)}\left(C_{\nu+1}^{\lambda}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda}(z)\right)$$

$$(1')\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1,m}(z)=\frac{2(\lambda+m-1)}{(\nu+2\lambda+m-1)}\frac{\lambda-1}{\lambda-1+m}\left(C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)-z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)\right)$$

$$(2')\quad C_{\nu+1}^{\lambda-1,m}(z)=\frac{2(\lambda+m-1)}{(\nu-m+1)}\frac{\lambda-1}{\lambda-1+m}\left(z\,C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)\right)$$

$$(3')\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)=\frac{z(\nu+m+2\lambda)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)-(\nu-m+1)C_{\nu+1}^{\lambda,m}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

$$(4')\quad C_{\nu-1}^{\lambda+1,m}(z)=\frac{(\nu+m+2\lambda-1)C_{\nu-1}^{\lambda,m}(z)-z(\nu-m)C_{\nu}^{\lambda,m}(z)}{2(1-z^2)\lambda}$$

Expression formelle de la dérivée paramétrique selon le degré ν des fonctions de Gegenbauer associées

Je distingue les deux constructions des fonctions associées de Gegenbauer, d'abord celle de la formule de Rodrigues lorsque μ est un entier, λ et ν étant des réels. Dans ce cas il suffit de prendre cette construction sous la forme : $C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=(-1)^{\mu}2^{\mu}(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)}C_{\nu-\mu}^{\lambda+\mu}(z)$.

Pour obtenir la dérivée selon le degré ν il suffit de connaître la dérivée première selon le degré de la fonction de Gegenbauer. Pour le paramètre λ demi-entier, μ et ν étant des réels, je pars de la formule en fonction hypergéométrique :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\lambda-\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)}$$

Construction de la dérivée paramétrique des fonctions associées de Gegenbauer pour μ entier, λ et ν réels

A partir des formules de la dérivée de la fonction de Gegenbauer selon le degré :

$$\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+2\lambda)-\psi(\nu+1)\}C_{\nu}^{\lambda}(z)+\\ -\frac{Sin(\pi\nu)}{\pi\,\Gamma(2\lambda)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(k!)}\times\\ \times(\psi(k+\nu+2\lambda)-\psi(\nu+2\lambda)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(n+2\lambda)-\psi(n+1)\}C_{n}^{\lambda}(z)+\\ +\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\begin{array}{l}\frac{(-1)^k\Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)(n-k)!k!}\times\\ \times(\psi(n+2\lambda+k)-\psi(n+2\lambda)+\psi(n+1)-\psi(n+1-k))\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]-\\ -(-1)^n\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(n+2\lambda+k)(k-n-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+k\right)k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

La formule de la dérivée paramétrique de la fonction associée de Gegenbauer s'écrit :

$$\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial\nu}=(-1)^{\mu}2^{\mu}(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)}\left.\frac{\partial C_{\varsigma}^{\lambda+\mu}(z)}{\partial\varsigma}\right|_{\varsigma=\nu-\mu}$$

Il vient :

$$\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+\mu+2\lambda)-\psi(\nu-\mu+1)\}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)+\\ -(-1)^{\mu}2^{\mu}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\dfrac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{Sin(\pi(\nu-\mu))}{\pi\,\Gamma(2(\lambda+\mu))}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k+\mu-\nu)\Gamma(\nu+\mu+2\lambda+k)\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}+k\right)(k!)}\times\\ \times\left(\begin{array}{l}\psi(k+\nu+\mu+2\lambda)-\psi(\nu+\mu+2\lambda)+\\ +\psi(\nu-\mu+1)-\psi(\nu-\mu-k+1)\end{array}\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{k}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(n+\mu+2\lambda)-\psi(n-\mu+1)\}C_{n}^{\lambda,\mu}(z)+\\ +(-1)^{\mu}2^{\mu}\left(1-z^{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\dfrac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-\mu}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(-1)^{k}\Gamma(n+\mu+2\lambda+k)}{\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}+k\right)(n-\mu-k)!\,k!}\times\\ \times\left(\begin{array}{l}\psi(n+\mu+2\lambda+k)-\psi(n+\mu+2\lambda)+\\ +\psi(n-\mu+1)-\psi(n-\mu+1-k)\end{array}\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{k}\end{array}\right]-\\ -(-1)^{n+\mu}\displaystyle\sum_{k=n-\mu+1}^{k=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(n+\mu+2\lambda+k)(k+\mu-n-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}+k\right)k!}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^{k}\right]\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

Construction de la dérivée paramétrique des fonctions associées de Gegenbauer pour λ demi-entier, μ et ν réels

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu,\lambda+\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\lambda-\mu;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu\right)}$$

$$\Rightarrow C_\nu^{\lambda,\mu}(z)=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\sum_{k=0}^{k=+\infty}\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\qquad\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k=\frac{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

La dérivée première du symbole de Pochammer que l'on applique à la formule précédente s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{d\nu}\{(\nu)_k\}=(\nu)_k(\psi(\nu+k)-\psi(\nu))\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{d\nu}\left\{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\right\}=\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)\right)\\ \frac{d}{d\nu}\left\{\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\right\}=\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\left(\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\right)\end{cases}$$

On utilise également une formule connue de la fonction Gamma :

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_{-k}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\frac{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}=\frac{Sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)\right)}{Sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\right)}=(-1)^k$$

$$\Rightarrow\frac{d}{d\nu}\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_{-k}\right)=0\Rightarrow\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)+\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)$$

La dérivée paramétrique s'écrit donc formellement :

$$\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial \nu}=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\sum_{k=0}^{k=+\infty}\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)+\\ \psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)\end{array}\right\}\\ \times\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial \nu}=\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\left\{\begin{array}{l}\left\{\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)\right\}\\ \times\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\end{array}\right\}$$

Étant donné qu'ici λ est un demi-entier, la forme de la dérivée paramétrique présente donc une forme indéterminée aux pôles de la fonction Gamma sur les deux termes :

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)_k=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)} & \textit{forme indéterminée pour}\quad k\leq\nu+\lambda-\frac{1}{2}\\ \dfrac{\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)} & \textit{forme indéterminée pour}\quad k>\nu+\lambda-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Lorsque ν tend vers un entier n. Mais nous pouvons lever cette incertitude par passage à la limite comme nous l'avons fait pour les fonctions de Legendre, de Legendre associées et de Gegenbauer. Soit au cas d'espèce :

$$\left.\frac{\partial C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\frac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\times\\ \times\left(\begin{array}{l}\left\{\sum_{k=1}^{k=n+\lambda-\frac{1}{2}}\left\{\lim_{\nu\to n}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\right\}\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\left\{\begin{array}{l}\left\{\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+k\right)-\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)\right\}\\ \times\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\end{array}\right\}\right\}+\\ -\sum_{k=n+\lambda+\frac{1}{2}}^{k=+\infty}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)_k\left\{\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{\psi\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\right\}\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\right\}\end{array}\right)\end{array}\right]$$

En insérant les limites suivantes :

$$\text{Comme}\quad\begin{cases} \underset{\nu\to n}{Lim}\dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^k\,\dfrac{n!}{(n-k)!}\Rightarrow \underset{\nu\to n}{Lim}\dfrac{\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}=(-1)^k\,\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\lambda+n\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\lambda+n-k\right)} \\ \underset{\nu\to n}{Lim}\dfrac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!\Rightarrow \underset{\nu\to n}{Lim}\left\{\dfrac{\psi\left(\lambda+\nu+\dfrac{1}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\right\}=(-1)^{\lambda+n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\lambda+n\right) \end{cases}$$

Il vient :

$$\left.\frac{\partial C_\nu^{\lambda,\mu}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{\pi}(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1-2\lambda}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\dfrac{(1+z)^{\frac{\mu}{2}}}{(1-z)^{\frac{\mu}{2}}}\times \\ \times\left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+\lambda-\frac{1}{2}}(-1)^k\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+n+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+n-k\right)}\left\{\begin{array}{l}\left\{\psi\left(\lambda+n+\frac{1}{2}+k\right)-\psi\left(\lambda+n+\frac{1}{2}-k\right)\right\} \\ \times\dfrac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\end{array}\right\}+ \\ -\displaystyle\sum_{k=n+\lambda+\frac{1}{2}}^{k=+\infty}\left\{(-1)^{\lambda+n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\lambda-n\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+\lambda+n\right)\frac{(1-z)^k}{2^k(k!)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda-\mu+k\right)}\right\} \end{array}\right) \end{array}\right]$$

Cette dernière expression peut être utilisée pour calculer directement les dérivées paramétriques des fonctions de Gegenbauer associées de première espèce de degré entier et d'ordre quelconque.

<u>Les fonctions associées généralisées de Legendre sur la coupure, « On the Cut »</u>

Les fonctions associées généralisées de Legendre sont solutions de l'équation différentielle du second degré suivante :

$$\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 P_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{\partial z^2}-2z\frac{\partial P_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{\partial z}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\alpha^2}{2(1-z)}-\frac{\beta^2}{2(1+z)}\right\}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=0$$

La solution de première espèce peut-être construite à l'aide de la fonction hypergéométrique, comme suit :

$$P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(1+z)^\beta}{(1-z)^\alpha}\,{}_2F_1\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1,-\nu-\frac{\alpha-\beta}{2};1-\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

Lorsque α=β, on retrouve l'expression de la fonction associée de Legendre de première espèce :

$$P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)=P_\nu^\alpha(z)=\frac{(1+z)^\alpha}{(1-z)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

Une autre représentation à l'aide des fonctions hypergéométriques est également possible dans le cas où les paramètres forment entre-eux des expressions entières :

Lorsque $\nu\pm\frac{\alpha\pm\beta}{2}$ *sont de valeur entière*

$$P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=\frac{(-1)^\alpha(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\,{}_2F_1\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1,-\nu+\frac{\alpha+\beta}{2};1+\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

Lorsque α=β est entier, on retrouve également une des expressions de la fonction associée de Legendre de première espèce :

$$P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)=P_\nu^\alpha(z)=\frac{(-1)^\alpha\left(1-z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(\nu+\alpha+1,-\nu+\alpha;1+\alpha;\frac{1-z}{2}\right)$$

Communément les fonctions associées de Legendre de deuxième espèce, sont définies à l'aide des fonctions hypergéométriques de la manière suivante :

$$Q_\nu^\alpha(z)=\frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)}\left\{\begin{array}{l}Cos(\alpha\pi)\frac{(1+z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\alpha;\frac{1-z}{2}\right)-\\-\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}\frac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1+\alpha;\frac{1-z}{2}\right)\end{array}\right\}$$

Pour ce qui est des fonctions associées généralisées de Legendre de deuxième espèce, l'expression est la suivante :

$$Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Cos(\alpha\pi)}{2}\Gamma(\alpha)\dfrac{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}\;{}_2F_1\left(-\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2},\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1;1-\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)-\\ +\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2^{\alpha-\beta+1}}\Gamma(-\alpha)\dfrac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\dfrac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}\times\\ \times{}_2F_1\left(-\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2},\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1;1+\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{Sin(\alpha\pi)}\qquad\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)=-\frac{\pi}{Sin(\alpha\pi)}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)=\frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)}\left\{\begin{array}{l}Cos(\alpha\pi)\dfrac{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}\dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2},\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1;1-\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-\alpha)}-\\ -\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2^{\alpha-\beta}}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\dfrac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}\times\\ \times\dfrac{{}_2F_1\left(-\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2},\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1;1+\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)}\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

On retrouve bien l'expression de la fonction de deuxième espèce lorsque α=β :

$$\Rightarrow Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)=\frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)}\left\{\begin{array}{l}Cos(\alpha\pi)\dfrac{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\;{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)+\\ -\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}\dfrac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\;{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1+\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)\end{array}\right\}$$

<u>*Wronskien des fonctions associées généralisées de Legendre de première et deuxième espèce*</u>

Le Wronskien des fonctions associées généralisées de Legendre est le suivant :

$$W\left\{P_\nu^{\alpha,\beta}(z),Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\}=\frac{dP_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)-P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\frac{dQ_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}=\frac{2^{\beta-\alpha}}{1-z^2}\frac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}$$

$$\Rightarrow W\left\{P_\nu^{\alpha,\alpha}(z),Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)\right\}=W\left\{P_\nu^{\alpha}(z),Q_\nu^{\alpha}(z)\right\}=\frac{1}{1-z^2}$$

Formule de connexion pour les fonctions associées généralisées de Legendre

Lien entre les fonctions de première et deuxième espèce par transformation de l'argument :

$$\begin{cases} P_\nu^{\beta,\alpha}(-z)=\dfrac{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\frac{2}{\pi}Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \\ Q_\nu^{\beta,\alpha}(-z)=-\dfrac{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\frac{\pi}{2}Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent aux deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=-\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}Q_\nu^{\beta,\alpha}(-z)\right\} \\ \dfrac{2}{\pi}Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)=Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_\nu^{\beta,\alpha}(-z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=-\dfrac{2}{\pi\,Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}Q_\nu^{\beta,\alpha}(-z)\right\} \\ Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)=\dfrac{\pi}{2\,Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_\nu^{\beta,\alpha}(-z)\right\} \end{cases}$$

Lorsque les paramètres α et β sont égaux, il vient :

$$\frac{\pi}{2}Sin((\nu+\alpha)\pi)P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)=-\{Cos((\nu+\alpha)\pi)Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)+Q_\nu^{\alpha,\alpha}(-z)\}$$
$$\frac{2}{\pi}Sin((\nu+\alpha)\pi)Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)=Cos((\nu+\alpha)\pi)P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)-P_\nu^{\alpha,\alpha}(-z)$$

Ce qui est la formule de connexion des fonctions de Legendre associées.

Le cas particulier de $\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}$ *ayant une valeur entière donne la relation :*

$$P_\nu^{\beta,\alpha}(-z)=(-1)^{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)$$

Lien entre les fonctions de première et deuxième espèce par transformation des ordres :

La première formule est la suivante :

$$\begin{cases} P_\nu^{-\alpha,-\beta}(z) = 2^{\alpha-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \\ Q_\nu^{-\alpha,-\beta}(z) = 2^{\alpha-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \end{cases}$$

Lorsque les paramètres α et β sont égaux, il vient :

$$\begin{cases} P_\nu^{-\alpha,-\alpha}(z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)\right\} \\ Q_\nu^{-\alpha,-\alpha}(z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\alpha}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\alpha}(z)\right\} \end{cases}$$

Ce qui est la formule de connexion des fonctions de Legendre associées.

Les deux autres formules sont les suivantes :

$$\begin{cases} P_\nu^{-\alpha,\beta}(z) = 2^{\alpha}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \\ Q_\nu^{-\alpha,\beta}(z) = 2^{\alpha}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\} \end{cases}$$

$$et \quad \begin{cases} P_\nu^{\alpha,-\beta}(z) = 2^{-\beta}P_\nu^{\alpha,\beta}(z) \\ Q_\nu^{\alpha,-\beta}(z) = 2^{-\beta}Q_\nu^{\alpha,\beta}(z) \end{cases}$$

Il vient le cas particulier de ces formules lorsque α = β :

$$\begin{cases} P_\nu^{-\beta,\beta}(z) = 2^{\beta}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left\{Cos(\beta\,\pi)P_\nu^{\beta,\beta}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\beta\,\pi)Q_\nu^{\beta,\beta}(z)\right\} \\ Q_\nu^{-\beta,\beta}(z) = 2^{\beta}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left\{Cos(\beta\,\pi)Q_\nu^{\beta,\beta}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_\nu^{\beta,\beta}(z)\right\} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} P_\nu^{\beta,-\beta}(z) = 2^{-\beta}P_\nu^{\beta,\beta}(z) \\ Q_\nu^{\beta,-\beta}(z) = 2^{-\beta}Q_\nu^{\beta,\beta}(z) \end{cases}$$

Formules de récurrence entre plus proches voisins

Voici quelques formules de récurrence entre plus proches voisins :

$$\left(2\nu(\nu+1)(2\nu+1)z+\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}(2\nu+1)\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=2\nu\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)P_{\nu+1}^{\alpha,\beta}(z)+2(\nu+1)\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)$$

$$P_\nu^{\alpha+1,\beta+1}(z)+\frac{\alpha-\beta+z(\alpha+\beta)}{\sqrt{1-z^2}}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)P_\nu^{\alpha-1,\beta-1}(z)=0$$

$$\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)((2\nu+1)z-(\alpha-\beta))P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)-\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)(2\nu z+\alpha-\beta)P_{\nu+1}^{\alpha,\beta}(z)=\left(2\nu(\nu+1)(2\nu+1)z+\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}(2\nu+1)\right)\sqrt{1-z^2}P_\nu^{\alpha-1,\beta-1}(z)$$

$$(2\nu+\alpha-\beta)P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)-(2\nu z+\alpha-\beta)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=2\nu\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\sqrt{1-z^2}P_\nu^{\alpha-1,\beta-1}(z)$$

$$(2(\nu+1)-(\alpha-\beta))P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-2\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)P_{\nu+1}^{\alpha,\beta}(z)=2(\nu+1)\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt{1-z^2}P_\nu^{\alpha-1,\beta-1}(z)$$

$$\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\alpha-\beta-2\nu z)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)+2\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)+2\nu\sqrt{1-z^2}P_\nu^{\alpha+1,\beta+1}(z)=0$$

$$2\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)P_{\nu+1}^{\alpha,\beta}(z)-\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\alpha-\beta+2(\nu+1)z)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-2(\nu+1)\sqrt{1-z^2}P_\nu^{\alpha+1,\beta+1}(z)=0$$

Les formules précédentes sont identiques avec les fonctions de deuxième espèce.

Formules de différentiation

Voici quelques formules de la dérivée première :

$$\begin{cases}\dfrac{dP_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}=\dfrac{(\alpha+\beta)z+\alpha-\beta}{2(1-z^2)}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\sqrt{1-z^2}}P_\nu^{\alpha-1,\beta-1}(z)\\[2ex]\dfrac{dP_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}=\dfrac{(\nu+1)^2z+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}}{(\nu+1)(1-z^2)}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{(\nu+1)(1-z^2)}P_{\nu+1}^{\alpha,\beta}(z)\\[2ex]\dfrac{dP_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}=-\dfrac{\nu^2z+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}}{\nu(1-z^2)}P_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\nu(1-z^2)}P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)\end{cases}$$

Les formules précédentes sont également identiques avec les fonctions de deuxième espèce.

Formule de Rodrigues pour les fonctions associées généralisées de Legendre

On note les paramètres suivant issus des paramètres originaux α et β :

$$\chi = \nu + \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \eta = \nu - \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \gamma = \nu + \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \delta = \nu - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Et la formule de Rodrigues s'écrit :

$$\frac{2^{\gamma}\eta!\delta!}{\chi!}P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = (-1)^{\gamma}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^{\delta}}{\partial z^{\delta}}\left((1-z)^{\gamma}(1+z)^{\eta}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = (-1)^{\gamma}\frac{\chi!}{2^{\gamma}\eta!\delta!}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^{\delta}}{\partial z^{\delta}}\left((1-z)^{\gamma}(1+z)^{\eta}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = (-1)^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}\frac{\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)!}{2^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)!\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)!}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\partial z^{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}}\left((1-z)^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(1+z)^{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = (-1)^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{2^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\partial z^{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}}\left((1-z)^{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(1+z)^{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$

Lorsque α et β sont égaux, elle redonne la formule de Rodrigues pour les fonctions de Legendre associées :

$$\alpha=\beta \Rightarrow \chi = \nu+\alpha \qquad \eta=\nu \qquad \gamma=\nu \qquad \delta=\nu-\alpha$$

$$P_{\nu}^{\alpha,\alpha}(z) = P_{\nu}^{\alpha}(z) = (-1)^{\nu}\frac{(\nu+\alpha)!}{2^{\nu}\nu!(\nu-\alpha)!}\left(1-z^{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial^{\nu-\alpha}}{\partial z^{\nu-\alpha}}\left(\left(1-z^{2}\right)^{\nu}\right)$$

Calcul de la fonction de deuxième espèce à l'aide des formules de liaison

En utilisant la formule de liaison sur l'argument, on peut calculer la fonction de deuxième espèce, comme suit :

$$Q_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = \frac{\pi}{2\,Sin\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) - \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_{\nu}^{\beta,\alpha}(-z)\right\}$$

Toutefois le dénominateur s'annule lorsque $\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}$ prend une valeur entière, typiquement par exemple si les trois paramètres ν,α,β sont de valeur entière et α,β sont de même parité. Dans ce cas l'expression de la fonction de deuxième espèce présente une forme indéterminée 0/0 puisque :

$$P_{\nu}^{\beta,\alpha}(-z) = (-1)^{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) \Rightarrow Q_{\nu}^{\alpha,\beta}(z) = \frac{0}{0}$$

En utilisant la règle de l'hôpital et par passage à la limite pour les valeurs ν,α, β et $\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}$ *entières , il vient :*

$$\left.\begin{array}{l}\nu=n,\alpha=a,\beta=b\in\mathbf{N}\\ n+\frac{a+b}{2}=\chi\in\mathbf{N}\\ n>\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases}n+\frac{a-b}{2}\in\mathbf{N}\\ n-\frac{a-b}{2}\in\mathbf{N}\end{cases}\end{array}\right\}\quad Q_n^{a,b}(z)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{Cos\left(\left(\nu+\frac{a+b}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{a,b}(z)-\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{a-b}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{a-b}{2}+1\right)}P_\nu^{b,a}(-z)\right\}}{\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{Sin\left(\left(\nu+\frac{a+b}{2}\right)\pi\right)\right\}}$$

$$Q_n^{a,b}(z)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\left[\begin{array}{l}Cos\left(\left(\nu+\frac{a+b}{2}\right)\pi\right)\frac{\partial P_\nu^{a,b}(z)}{\partial\nu}-\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{a-b}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{a-b}{2}+1\right)}\frac{\partial P_\nu^{b,a}(-z)}{\partial\nu}-\\ -\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{a-b}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\frac{a-b}{2}+1\right)}P_\nu^{b,a}(-z)\left\{\psi\left(\nu+\frac{a-b}{2}+1\right)-\psi\left(\nu-\frac{a-b}{2}+1\right)\right\}\end{array}\right]}{\pi\ Cos\left(\left(\nu+\frac{a+b}{2}\right)\pi\right)}$$

$$\Rightarrow Q_n^{a,b}(z)=\frac{(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}}{2}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}\left.\frac{\partial P_\nu^{a,b}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\frac{\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{2^{\alpha-\beta}\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}\left.\frac{\partial P_\nu^{b,a}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\\ -\frac{2^{b-a}\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}P_n^{b,a}(-z)\left\{\psi\left(n+\frac{a-b}{2}+1\right)-\psi\left(n-\frac{a-b}{2}+1\right)\right\}\end{array}\right]$$

Il est possible de simplifier légèrement cette expression, en calculant la différence de la fonction Digamma d'Euler :

$$\psi(c)=\frac{1}{c-1}+\frac{1}{c-2}+\cdots+\frac{1}{c-(c-d)}+\psi(d)\Rightarrow\psi(c)-\psi(d)=\sum_{l=d}^{l=c-1}\frac{1}{l}$$

$$\psi\left(n+\frac{a-b}{2}+1\right)-\psi\left(n-\frac{a-b}{2}+1\right)=\sum_{l=n-\frac{a-b}{2}+1}^{l=n+\frac{a-b}{2}}\frac{1}{l}=\sum_{l=1}^{l=a}\frac{2}{2l+2n-a+b}$$

$$Q_n^{a,b}(z)=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial P_\nu^{a,b}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\frac{(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{2^{\alpha-\beta}\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}\left.\frac{\partial P_\nu^{b,a}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\frac{2^{b-a}(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}P_n^{b,a}(-z)\sum_{l=n-\frac{a-b}{2}+1}^{l=n+\frac{a-b}{2}}\frac{1}{l}\right]$$

$$\Rightarrow Q_n^{a,b}(z)=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left.\frac{\partial P_\nu^{a,b}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\frac{(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{2^{\alpha-\beta}\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}\left.\frac{\partial P_\nu^{b,a}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-\\-\frac{2^{b-a+1}(-1)^{n+\frac{a+b}{2}}\left(n+\frac{a-b}{2}\right)!}{\left(n-\frac{a-b}{2}\right)!}P_n^{b,a}(-z)\sum_{l=1}^{l=a}\frac{1}{2l+2n-a+b}\end{array}\right]$$

On retrouve l'expression de la fonction de deuxième espèce de Legendre associée dans les cas n, m entiers :

$$a=b=m\Rightarrow Q_n^m(z)=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^{n+m}\left.\frac{\partial P_\nu^m(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right]$$

<u>Orthogonalité des fonctions associées généralisées de Legendre de première espèce :</u>

Les fonctions associées généralisées de Legendre sont orthogonales sur l'intervalle [-1,+1]

$$\chi=\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad\eta=\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad\gamma=\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad\delta=\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1}dz\,P_\nu^{\alpha,\beta}(z)P_{\nu'}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{2^{1+\beta-\alpha}}{2\nu+1}\frac{\gamma!\,\chi!}{\eta!\,\delta!}\partial_{\nu,\nu'}\Leftrightarrow\int_{-1}^{+1}dz\,P_\nu^{\alpha,\beta}(z)P_{\nu'}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{2^{1+\beta-\alpha}}{2\nu+1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\partial_{\nu,\nu'}$$

Les fonctions associées généralisées de Legendre comme solutions de problèmes aux limites en physique mathématique

En coordonnées sphéroïdales allongées :

Parler des fonctions associées généralisées de Legendre ne sert à rien, s'il n'y a pas de bénéfice à les étudier comme solutions de problèmes aux limites. Dans un article de 1987, N.A.Virchenko « Applications of Legendre's generalized associated functions », l'auteure donne en coordonnées sphéroïdales allongées :

$$\left.\begin{array}{l} x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta) \end{array}\right\}; \frac{x^2+y^2}{c^2} = Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{c^2} = Cosh^2(\eta) - Sin^2(\vartheta) = Sinh^2(\eta) + Cos^2(\vartheta)$$

l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \left(\frac{1}{Sinh^2(\eta)} + \frac{1}{Sin^2(\vartheta)}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)} + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\right)\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Le terme spatial de l'expression correspond peu ou prou au Laplacien en coordonnées sphéroïdale allongées. On sait notamment que le Laplacien s'écrit :

$$\Delta U = \frac{1}{c^2\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)\right)}\left\{\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)\right\} + \frac{1}{c^2 Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

$$c^2\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)\right)\Delta U - \left(\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)} + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\right)\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta U - \frac{Cos(\vartheta)Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)Cosh(\eta)}{c^2 Sin^2(\vartheta)Sinh^2(\eta)\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)\right)}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Maintenant d'après les formules de correspondance avec le système cartésien, on va donner la forme de l'équation aux dérivées partielles dont Virchenko parle :

$$\left.\begin{array}{l} Cosh(\eta) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{2c} \\ Cos(\vartheta) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} - \sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{2c} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Cosh^2(\eta) - Cos^2(\vartheta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{c^2}$$

$$\Rightarrow Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{c^2}$$

$$\Rightarrow Sin^2(\vartheta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} - \left(x^2+y^2+z^2-c^2\right)}{2c^2}$$

$$\Rightarrow Sinh^2(\eta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} + \left(x^2+y^2+z^2-c^2\right)}{2c^2}$$

$$\Rightarrow Cos(\vartheta)Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)Cosh(\eta) = \frac{(z+c)\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{c^2}$$

$$\Rightarrow Cos(\vartheta)Sinh^2(\eta) - Sin^2(\vartheta)Cosh(\eta) = \frac{(z-c)\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}}{c^2}$$

Et l'équation s'écrit : $\Delta U - \dfrac{z+c}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}}\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$*, ce qui semble être une équation de diffusion axi-symétrique transformée en coordonnées sphéroïdales allongées.*

La séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles donne :

$U(\eta,\vartheta,\varphi,t)=\mathrm{H}(\eta)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)T(t)$

$$\frac{\left[\begin{array}{l}\left\{\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)\right\}+\\+\left\{\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)\right\}-\left\{\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}+\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right\}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}\end{array}\right]}{\left(\frac{1}{Sinh^2(\eta)}+\frac{1}{Sin^2(\vartheta)}\right)}+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

Constante de séparation s_1 *entre les variables* η,ϑ,t *et* φ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left\{\dfrac{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}-\dfrac{s_1}{Sinh^2(\eta)}\right\}+\left\{\dfrac{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}-\dfrac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}\right\}}{\left\{\dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}+\dfrac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right\}}-\dfrac{1}{T(t)}\dfrac{\partial T(t)}{\partial t}=0\\ \dfrac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+s_1\Phi(\varphi)=0\end{cases}$$

Puis s_2 *entre les variables* η,ϑ *et* t

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left\{\dfrac{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}-\dfrac{s_1}{Sinh^2(\eta)}-s_2\dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\right\}+\left\{\dfrac{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}-\dfrac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\dfrac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right\}=0\\ \dfrac{\partial T(t)}{\partial t}+s_2T(t)=0\end{cases}$$

Puis s_3 *entre les variables* η *et* ϑ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{Sinh(\eta)}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\dfrac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\left\{s_3+\dfrac{s_1}{Sinh^2(\eta)}+s_2\dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\right\}\mathrm{H}(\eta)=0\\ \dfrac{1}{Sin(\vartheta)}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\dfrac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\left\{s_3-\dfrac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\dfrac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right\}\Theta(\vartheta)=0\end{cases}$$

Posons $s_1=\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\quad s_2=\dfrac{\mu^2-\xi^2}{2}\quad s_3=\nu(\nu+1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{Sinh(\eta)}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\dfrac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\left\{\nu(\nu+1)-\dfrac{\mu^2}{2(1-Cosh(\eta))}-\dfrac{\xi^2}{2(1+Cosh(\eta))}\right\}\mathrm{H}(\eta)=0\\ \dfrac{1}{Sin(\vartheta)}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\dfrac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\left\{\nu(\nu+1)-\dfrac{\mu^2}{2(1-Cos(\vartheta))}-\dfrac{\xi^2}{2(1+Cos(\vartheta))}\right\}\Theta(\vartheta)=0\\ \dfrac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\Phi(\varphi)=0\\ \dfrac{\partial T(t)}{\partial t}+\dfrac{\mu^2-\xi^2}{2}T(t)=0\end{cases}$$

.

En posant z=Cosh(η) ou z=Cos(θ), on retombe sur les équations des fonctions associées généralisées de Legendre, soit donc à rechercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} \mathrm{H}(\eta) = A\, P_\nu^{\mu,\xi}\left(Cosh(\eta)\right) + B\, Q_\nu^{\mu,\xi}\left(Cosh(\eta)\right) \\ \Theta(\vartheta) = C\, P_\nu^{\mu,\xi}\left(Cos(\vartheta)\right) + D\, Q_\nu^{\mu,\xi}\left(Cos(\vartheta)\right) \\ \Phi(\varphi) = E\, Cos\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) + F\, Sin\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) \\ T(t) = G\, e^{-\frac{\mu^2-\xi^2}{2}t} \end{cases}$$

<u>En coordonnées toroïdales :</u>

Dans le même article « Applications of Legendre's generalized associated functions », l'auteure N.A.Virchenko donne également en coordonnées toroïdales :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cSinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} Cos(\varphi) \\ y &= \frac{cSinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} Sin(\varphi) \\ z &= \frac{cSin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)} \end{aligned}\right\}; \frac{x^2+y^2}{c^2} = \frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^2} \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{Sin^2(\vartheta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^2}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2} = \frac{Sinh^2(\eta)+Sin(\vartheta)^2}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^2} = \frac{Cosh^2(\eta)-Cos(\vartheta)^2}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^2}$$

l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)Sinh(\eta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} -$$
$$- \frac{Cosh(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)Sinh(\eta)}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Le terme spatial de l'expression correspond peu ou prou au Laplacien en coordonnées toroïdales. On sait notamment que le Laplacien s'écrit :

$$\Delta U = \frac{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^3}{c^2 Sinh(\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)\right\}+$$

$$+\frac{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^2}{c^2 Sinh^2(\eta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^3}{c^2 Sinh(\eta)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\\ +\frac{1}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-$$

$$-\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2 Sinh(\eta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^3}\Delta U - \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow \Delta U - \frac{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^2 Cosh(\eta)}{c^2 Sinh^2(\eta)}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow \Delta U - \frac{Cosh(\eta)}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

Il reste à exprimer le terme Cosh(η), en fonction de x et y. D'après les formules de correspondances des coordonnées toroïdales et des coordonnées cartésiennes, il vient :

$$d_1=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}\qquad d_2=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}$$

$$\eta = Log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\Rightarrow Cosh(\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1{}^2+d_2{}^2}{d_1 d_2}\right)$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta)=\frac{x^2+y^2+z^2+c^2}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}}$$

$$Cos(\vartheta)=\frac{d_1{}^2+d_2{}^2-4c^2}{2d_1 d_2}=\frac{x^2+y^2+z^2-c^2}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)=\frac{2c^2}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta)+Cos(\vartheta)=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}}$$

Et l'équation aux dérivées partielles s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U - \frac{x^2+y^2+z^2+c^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-c\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}+c\right)^2+z^2}}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

On sait que le Laplacien en coordonnées toroïdales n'est pas séparable, mais R-séparable moyennant un changement dans la solution cherchée :

$$U(\eta,\vartheta,\varphi,t)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\,V(\eta,\vartheta,\varphi,t)$$

$$V(\eta,\vartheta,\varphi,t)=\mathrm{H}(\eta)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)T(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-$$

$$-\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{V}{4}+\frac{1}{Sinh^2(\eta)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}-\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$Sinh^2(\eta)\left[\left\{\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)\right\}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{4}-\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}\right]+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

Constante de séparation s_1 *entre les variables* η,ϑ,t *et* φ

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\frac{s_1}{Sinh^2(\eta)}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{4}-\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=0\\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+s_1\Phi(\varphi)=0\end{cases}$$

Puis s_2 *entre les variables* η,ϑ *et* t

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\frac{s_1}{Sinh^2(\eta)}+\frac{1}{4}-s_2\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}=0\\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+s_2T(t)=0\end{cases}$$

Puis s_3 *entre les variables* η *et* ϑ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\left\{s_3-\frac{1}{4}+\frac{s_1}{Sinh^2(\eta)}+s_2\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\right\}\mathrm{H}(\eta)=0\\ \frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+s_3\Theta(\vartheta)=0\end{cases}$$

Posons $s_1=\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\quad s_2=\frac{\mu^2-\xi^2}{2}\quad s_3=\nu^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\left\{\nu^2-\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{2(1-Cosh(\eta))}-\frac{\xi^2}{2(1+Cosh(\eta))}\right\}\mathrm{H}(\eta)=0\\ \Leftrightarrow\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Sinh(\eta)\frac{\partial\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta}\right)-\left\{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\mu^2}{2(1-Cosh(\eta))}-\frac{\xi^2}{2(1+Cosh(\eta))}\right\}\mathrm{H}(\eta)=0\\ \frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+\nu^2\Theta(\vartheta)=0\\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\Phi(\varphi)=0\\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+\frac{\mu^2-\xi^2}{2}T(t)=0\end{cases}$$

En posant z=Cosh(η), on retombe sur les équations des fonctions associées généralisées de

Legendre, soit donc à rechercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} \mathrm{H}(\eta) = A\, P^{\mu,\xi}_{\nu-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + B\, Q^{\mu,\xi}_{\nu-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \\ \Theta(\vartheta) = C\, Cos(\nu\vartheta) + D\, Sin(\nu\vartheta) \\ \Phi(\varphi) = E\, Cos\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) + F Sin\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) \\ T(t) = G\, e^{-\frac{\mu^2-\xi^2}{2}t} \end{cases}$$

<u>En coordonnées bipolaires-sphérique ou bi-sphériques:</u>

Toujours dans le même article, il est cité en coordonnées bi-sphériques:

$$\left.\begin{matrix} x = \dfrac{cSin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} Cos(\varphi) \\ y = \dfrac{cSin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} Sin(\varphi) \\ z = \dfrac{cSinh(\eta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)} \end{matrix}\right\}; \frac{x^2+y^2}{c^2} = \frac{Sin^2(\vartheta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2} \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{Sinh^2(\eta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2} = \frac{Sinh^2(\eta) + Sin(\vartheta)^2}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2} = \frac{Cosh^2(\eta) - Cos(\vartheta)^2}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2}$$

l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))Sin(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} -$$
$$-\frac{Cos(\vartheta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))Sin(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Le terme spatial de l'expression comporte le Laplacien en coordonnées bi-sphériques. On sait notamment que le Laplacien s'écrit :

$$\Delta U = \frac{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^3}{c^2 Sin(\vartheta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)\right\} +$$
$$+\frac{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2}{c^2 Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^3}{c^2 Sin(\vartheta)}\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\dfrac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\dfrac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta) - Cos(\vartheta)}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \\ + \dfrac{1}{Sin(\vartheta)(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2 Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^3}\Delta U - \frac{Cos(\vartheta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))Sin(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta U - \frac{(Cosh(\eta) - Cos(\vartheta))^2 Cos(\vartheta)}{c^2 Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \Delta U - \frac{Cos(\vartheta)}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Il reste à exprimer le terme Cos(ϑ), en fonction de x et y. D'après les formules de correspondances des coordonnées bi-sphériques et des coordonnées cartésiennes:

$$Q=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}=d_1d_2$$

$$d_1=\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\quad d_2=\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}\quad {d_1}^2+{d_2}^2=2\left(x^2+y^2+z^2+c^2\right)\quad {d_1}^2-{d_2}^2=4zc$$

$$\eta=Log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\Rightarrow Cosh(\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}+\frac{d_2}{d_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{{d_1}^2+{d_2}^2}{d_1d_2}\right)\Rightarrow Cosh(\eta)=\frac{x^2+y^2+z^2+c^2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}}$$

$$\Rightarrow Sinh(\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}-\frac{d_2}{d_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{{d_1}^2-{d_2}^2}{d_1d_2}\right)=\frac{2zc}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}$$

$$Cos(\vartheta)=\frac{{d_1}^2+{d_2}^2-4c^2}{2d_1d_2}=\frac{x^2+y^2+z^2-c^2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)=\frac{2c^2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}$$

$$\Rightarrow Cosh(\eta)+Cos(\vartheta)=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}$$

L'équation aux dérivées partielles devient :

$$\Delta U-\frac{x^2+y^2+z^2-c^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

On sait que le Laplacien en coordonnées bi-sphériques n'est pas séparable, mais R-séparable moyennant un changement dans la solution cherchée :

$$U(\eta,\vartheta,\varphi,t)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}V(\eta,\vartheta,\varphi,t)$$

$$V(\eta,\vartheta,\varphi,t)=\mathrm{H}(\eta)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)T(t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{Sinh(\eta)}{2(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}V+(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=\frac{Sin(\vartheta)}{2(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}V+(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{Sinh(\eta)Sin(\vartheta)}{2(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{3/2}}V+\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

$$\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=\frac{Sin^2(\vartheta)}{2(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{3/2}}V+\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{Sin(\vartheta)\left(2-2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)-Sinh^2(\eta)\right)}{4(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{5/2}}V$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)=\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+\frac{Cos(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}+$$

$$+\frac{4Sin(\vartheta)Cos(\vartheta)Cosh(\eta)-4Sin(\vartheta)+Sin^3(\vartheta)}{4(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{5/2}}V$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)=$$

$$\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{Sin(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+\frac{Cos(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}-\frac{Sin(\vartheta)}{4(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{1/2}}V$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{Sin(\vartheta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)+\frac{1}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))Sin(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}-$$

$$-\frac{Cos(\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))Sin(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+\frac{Cos(\vartheta)}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}-\frac{V}{4}+\frac{1}{Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}-\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+\frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)-\frac{V}{4}+\frac{1}{Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}-\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

La séparation des variables dans l'équation sur V donne :

$$Sin^2(\vartheta)\left\{\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)}\frac{\partial^2\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{4}-\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}\right\}+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

Constante de séparation s_1 *entre les variables* η,ϑ,t *et* φ

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)}\frac{\partial^2\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-\frac{1}{4}-\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=0\\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+s_1\Phi(\varphi)=0\end{cases}$$

Puis s_2 *entre les variables* η,ϑ *et* t

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{H}(\eta)}\frac{\partial^2\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{4}-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}=0\\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+s_2T(t)=0\end{cases}$$

Puis s_3 *entre les variables* η *et* ϑ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial^2\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta^2}-s_3\mathrm{H}(\eta)=0\\ \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\Theta(\vartheta)\left(s_3-\frac{1}{4}-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right)=0\end{cases}$$

Posons $s_1=\frac{\mu^2+\xi^2}{2}$ $\quad s_2=\frac{\mu^2-\xi^2}{2}$ $\quad s_3=\nu^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial^2\mathrm{H}(\eta)}{\partial\eta^2}-\nu^2\mathrm{H}(\eta)=0\\ \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)+\left\{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{\mu^2}{2(1-Cos(\vartheta))}-\frac{\xi^2}{2(1+Cos(\vartheta))}\right\}\Theta(\vartheta)=0\\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\Phi(\varphi)=0\\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+\frac{\mu^2-\xi^2}{2}T(t)=0\end{cases}$$

En posant z=Cos(θ), on retombe sur les équations des fonctions associées généralisées de Legendre, soit donc à rechercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases}\mathrm{H}(\eta)=A\,e^{\nu\eta}+B\,e^{-\nu\eta}\\ \Theta(\vartheta)=C\,P^{\mu,\xi}_{\nu-\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta))+D\,Q^{\mu,\xi}_{\nu-\frac{1}{2}}(Cos(\vartheta))\\ \Phi(\varphi)=E\,Cos\left(\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right)+FSin\left(\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right)\\ T(t)=G\,e^{-\frac{\mu^2-\xi^2}{2}t}\end{cases}$$

En coordonnées sphériques

Abordons finalement le cas le plus simple. Toujours dans le même article, il est cité en dernier ressort, l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\Delta U - \frac{z}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Que l'on va décliner en coordonnées sphériques, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = rSin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = rSin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = rCos(\vartheta) \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)+\frac{1}{r^2 Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)+\frac{1}{r^2 Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}-\frac{Cos(\vartheta)}{r^2 Sin^2(\vartheta)}\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

La séparation des variables dans l'équation donne :

$$r^2 Sin^2(\vartheta)\left\{\frac{1}{r^2}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)-\frac{Cos(\vartheta)}{r^2 Sin^2(\vartheta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}\right\}+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}=0$$

Constante de séparation s_1 *entre les variables* r, ϑ, t *et* φ

$$\begin{cases} \frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=0 \\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}+s_1\Phi(\varphi)=0 \end{cases}$$

Puis s_2 *entre les variables* r, ϑ *et* t

$$\begin{cases} \frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta(\vartheta)Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}=0 \\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+s_2 T(t)=0 \end{cases}$$

Puis s_3 *entre les variables* r *et* ϑ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-s_3 R(r)=0 \\ \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)+\Theta(\vartheta)\left\{s_3-\frac{s_1}{Sin^2(\vartheta)}-s_2\frac{Cos(\vartheta)}{Sin^2(\vartheta)}\right\}=0 \end{cases}$$

Posons $s_1=\frac{\mu^2+\xi^2}{2}$ $s_2=\frac{\mu^2-\xi^2}{2}$ $s_3=\nu(\nu+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\nu(\nu+1)R(r)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}R(r)=0 \\ \frac{1}{Sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(Sin(\vartheta)\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{2(1-Cos(\vartheta))}-\frac{\xi^2}{2(1+Cos(\vartheta))}\right\}\Theta(\vartheta)=0 \\ \frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}+\frac{\mu^2+\xi^2}{2}\Phi(\varphi)=0 \\ \frac{\partial T(t)}{\partial t}+\frac{\mu^2-\xi^2}{2}T(t)=0 \end{cases}$$

En posant z=Cos(θ), on retombe sur les équations des fonctions associées généralisées de Legendre, soit donc à rechercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} R(r) = A\, r^{\nu} + B\, r^{-(\nu+1)} \\ \Theta(\vartheta) = C\, P_{\nu}^{\mu,\xi}(Cos(\vartheta)) + D\, Q_{\nu}^{\mu,\xi}(Cos(\vartheta)) \\ \Phi(\varphi) = E\, Cos\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) + F Sin\left(\dfrac{\mu^2+\xi^2}{2}\varphi\right) \\ T(t) = G\, e^{-\frac{\mu^2-\xi^2}{2}t} \end{cases}$$

<u>Des crypto-fonctions encore plus élusives de physique mathématique :</u> ***<u>Les fonctions associées généralisées de Gegenbauer</u>*** *<u>sur l'intervalle (-1,1]</u>*

Dans la catégorie des fonctions encore plus introuvables, on peut envisager les fonctions de première et deuxième espèce, solutions de l''équation :

$$(1-z^2)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} - (2\lambda+1)z\frac{\partial y(z)}{\partial z} + \left\{\nu(\nu+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{2(1-z)} - \frac{\xi(\xi+2\lambda-1)}{2(1+z)}\right\}y(z) = 0$$

Tentons de les rapprocher des fonctions associées généralisées de Legendre présentées dans la section précédentes :

$$(1)\quad (1-z^2)\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} - (2\lambda+1)z\frac{\partial y(z)}{\partial z} + \left\{\nu(\nu+2\lambda) - \frac{\mu(\mu+2\lambda-1)}{2(1-z)} - \frac{\xi(\xi+2\lambda-1)}{2(1+z)}\right\}y(z) = 0$$

$$y(z) = (1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\Theta(z)$$

$$\Rightarrow (1-z^2)\frac{\partial^2 \Theta(z)}{\partial z^2} - 2z\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z} + \left\{\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\lambda+\mu-\frac{1}{2}\right)^2}{2(1-z)} - \frac{\left(\lambda+\xi-\frac{1}{2}\right)^2}{2(1+z)}\right\}\Theta(z) = 0$$

Ce qui est l'équation des fonctions associées généralisées de Legendre. Autrement dit les solutions de première et deuxième espèce de l'équation de départ, se présentent sous la forme :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = A\,(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = B\,(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \quad z\in[-1,1]$$

ou bien

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = A\,(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) \quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = B\,(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) \quad z\in[-1,1]$$

Où les deux constantes A et B sont à déterminer. Par comparaison avec les formules des fonctions de Gegenbauer associées, on peut donc proposer les expressions suivantes lorsque λ est demi-entier, μ, ξ, ν sont quelconques :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(z) \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)$$

Et lorsque λ est quelconque et μ entier, on sait que :

$$\begin{cases} P_\nu^{\mu,\xi}(z) = (-1)^{-\mu} \dfrac{1}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\mu-\xi}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\mu-\xi}{2}+1\right)} P_\nu^{-\mu,-\xi}(z) \\ Q_\nu^{\mu,\xi}(z) = (-1)^{-\mu} \dfrac{1}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\mu-\xi}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\mu-\xi}{2}+1\right)} Q_\nu^{-\mu,-\xi}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \dfrac{1}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \\ Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu} \dfrac{1}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \end{cases}$$

Ce qui donne l'expression valable lorsque λ, ν sont quelconques et, μ, ξ sont entiers :

$$\begin{cases} C_\nu^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^{\mu-\xi}} \dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \end{cases}$$

qui redonnent bien les formules des fonctions de Gegenbauer associées lorsque μ= ξ, soit :

$$C_\nu^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\lambda)} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}} Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(z)$$

Orthogonalité des fonctions associées généralisées de Gegenbauer de première espèce :

Les fonctions associées généralisées de Gegenbauer sont orthogonales sur l'intervalle [-1,+1], comme il en résulte de l'orthogonalité des fonctions associées généralisées de Legendre :

$$\nu,\nu',\alpha,\beta\in\mathbf{N}\quad \int_{-1}^{+1}dz\,P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z)P_{\nu'}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{2^{1+\beta-\alpha}}{2\nu+1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}-\lambda-\mu\quad \beta=\frac{1}{2}-\lambda-\xi\Rightarrow\alpha+\beta=1-2\lambda-\mu-\xi\quad \alpha-\beta=\xi-\mu$$

$$\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\xi-\mu}{2}\qquad \nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\to\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1$$

$$\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\qquad \nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\to\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{+1}dz\,P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z)P_{\nu'+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z)=\frac{2^{\mu-\xi}}{\nu+\lambda}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}\partial_{\nu,\nu'}$$

$$Comme\quad C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\mu}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{2^{\mu-\xi}\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z)$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{+1}dz\left(1-z^2\right)^{-\frac{1-2\lambda}{2}}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)C_{\nu'}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=\frac{2^{1-2\lambda}}{2^{\mu-\xi}}\frac{\pi}{(\nu+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}\frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\partial_{\nu,\nu'}$$

Lorsque les deux paramètres μ et ξ sont égaux on retrouve bien la relation d'orthogonalité sur les fonctions de Gegenbauer associées de première espèce :

$$\Rightarrow\int_{-1}^{+1}dz\left(1-z^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_{\nu}^{\lambda,\mu}(z)C_{\nu'}^{\lambda,\mu}(z)=2^{1-2\lambda}\frac{\pi}{(\lambda+\nu)(\Gamma(\lambda))^2}\frac{\Gamma(\nu+\mu+2\lambda)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\partial_{\nu,\nu'}$$

Lien des fonctions de Gegenbauer associées généralisées avec les fonctions de Jacobi

On a vu dans le chapitre sur les fonctions de Jacobi « On the Cut », les liens existant avec les fonctions associées généralisées de Legendre :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=2^\beta\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{-\alpha,-\beta}(z)\Leftrightarrow P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{-\alpha,-\beta}(z)=2^{-\beta}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\Leftrightarrow P_\nu^{\alpha,\beta}(z)=2^\beta\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$$

$$Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=2^\alpha\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z)$$

$$\Leftrightarrow Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\Leftrightarrow Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

Ceci permet de construire le lien des fonctions de Gegenbauer associées généralisée avec les fonctions de Jacobi, comme suit selon les deux expressions que l'on a établi auparavant.

Soit lorsque λ est demi-entier et ν, μ, ξ sont quelconques :

$$\alpha=\lambda-\frac{1}{2}+\mu \quad -\alpha=\frac{1}{2}-\lambda-\mu \quad \beta=\lambda-\frac{1}{2}+\xi \quad -\beta=\frac{1}{2}-\lambda-\xi$$

$$\nu\to\lambda+\nu-\frac{1}{2} \quad \nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\to 2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2} \quad \nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2} \quad \nu-\frac{\alpha+\beta}{2}\to\nu-\frac{\mu+\xi}{2}$$

$$P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)=2^{\lambda-\frac{1}{2}+\xi}\frac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}}(1+z)^{-\frac{2\lambda-1+2\xi}{4}}P_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)$$

$$P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)=2^{\lambda-\frac{1}{2}+\xi}\frac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}}(1+z)^{-\frac{2\lambda-1+2\xi}{4}}P_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}2^{\xi}(1-z)^{-\frac{2\lambda-1+\mu}{2}}(1+z)^{-\frac{2\lambda-1+\xi}{2}}\frac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}P_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)$$

$$Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)=2^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu}\frac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{\frac{2\lambda-1+2\mu}{4}}(1+z)^{\frac{2\lambda-1+2\xi}{4}}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{1-2\lambda-\mu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{\xi}{2}}\frac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{2\lambda-1+\xi}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{2\lambda-1+\mu}{2}}(1+z)^{-\frac{2\lambda-1+\xi}{2}}P_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{\xi}{2}}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{2\lambda-1+\xi}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\dfrac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{2\lambda-1+\mu}{2}}(1+z)^{-\frac{2\lambda-1+\xi}{2}}P_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\dfrac{\Gamma\left(2\lambda+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{\xi}{2}}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)\end{cases}$$

Ce qui redonne bien l'expression des fonctions associées généralisées de Legendre lorsque λ=1/2, et l'expression de la fonction associée de Gegenbauer lorsque μ= ξ.

Soit lorsque λ, ν sont quelconques et μ, ξ sont entiers :

$$\alpha = \frac{1}{2} - \lambda - \mu \quad -\alpha = \lambda - \frac{1}{2} + \mu \quad \beta = \frac{1}{2} - \lambda - \xi \quad -\beta = \lambda - \frac{1}{2} + \xi \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1-2\lambda-\mu-\xi}{2} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\xi-\mu}{2}$$

$$\nu \to \lambda + \nu - \frac{1}{2} \quad \nu + \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \to \nu + 1 - \frac{\mu+\xi}{2} \quad \nu - \frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \to \lambda + \nu + \frac{1}{2} + \frac{\mu-\xi}{2}$$

$$\nu - \frac{\alpha+\beta}{2} \to 2\lambda - 1 + \nu + \frac{\mu+\xi}{2}$$

$$\Rightarrow P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) = 2^{\frac{1}{2}-\lambda-\xi} \frac{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{\frac{2\lambda-1+2\mu}{2}} (1+z)^{\frac{2\lambda-1+2\xi}{2}} P_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\mu} 2^{-\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{\frac{\mu}{2}} (1+z)^{\frac{\xi}{2}} P_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) = 2^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu} \frac{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{-\frac{2\lambda-1+2\mu}{2}} (1+z)^{-\frac{2\lambda-1+2\xi}{2}} Q_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\mu} 2^{2\lambda-1+\xi} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{-\frac{2\lambda-1+\mu}{2}} (1+z)^{-\frac{2\lambda-1+\xi}{2}} Q_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\mu} 2^{-\mu} \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{\frac{\mu}{2}} (1+z)^{\frac{\xi}{2}} P_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi\right)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\mu} 2^{2\lambda-1+\xi} \dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\frac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)} (1-z)^{-\frac{2\lambda-1+\mu}{2}} (1+z)^{-\frac{2\lambda-1+\xi}{2}} Q_{2\lambda-1+\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi\right)}(z) \end{cases}$$

On retrouve l'expression du lien trouvé avec les fonctions associées de Gegenbauer lorsque μ=ξ, et pour λ=1/2, il vient, sachant que μ et ξ sont entiers :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu,\xi}(z)=(-1)^{\mu}2^{-\mu}\dfrac{\Gamma\left(\nu+1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{\xi}{2}}P_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{(\mu,\xi)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu,\xi}(z)=(-1)^{\mu}2^{\xi}\dfrac{\Gamma\left(\nu+1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{\mu}{2}}(1+z)^{-\frac{\xi}{2}}Q_{\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{(-\mu,-\xi)}(z) \end{cases}$$

En utilisant les relations connues des fonctions de Jacobi lorsque les ordres sont entiers :

$$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta}Cos(\alpha\,\pi)P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(-\alpha,-\beta)}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\left\{P_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)+\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)\right\} \\ 2^{\alpha+\beta}Cos(\alpha\pi)Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(-\alpha,-\beta)}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\left\{Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)\right\} \end{cases}$$

$$\alpha\quad entier\Rightarrow\begin{cases} P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(-\alpha,-\beta)}(z)=(-1)^{\alpha}2^{-\alpha-\beta}(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}P_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z) \\ Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(-\alpha,-\beta)}(z)=(-1)^{\alpha}2^{-\alpha-\beta}(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{(\mu,\xi)}(z)=(-1)^{\mu}2^{\mu+\xi}(1-z)^{-\mu}(1+z)^{-\xi}P_{\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{(-\mu,-\xi)}(z) \\ Q_{\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{(-\mu,-\xi)}(z)=(-1)^{\mu}2^{-\mu-\xi}(1-z)^{\mu}(1+z)^{\xi}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{(\mu,\xi)}(z) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\frac{1}{2},\mu,\xi}(z)=2^{\xi}\dfrac{\Gamma\left(\nu+1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{\mu}{2}}(1+z)^{-\frac{\xi}{2}}P_{\nu+\frac{\mu+\xi}{2}}^{(-\mu,-\xi)}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\frac{1}{2},\mu,\xi}(z)=2^{-\mu}\dfrac{\Gamma\left(\nu+1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{\xi}{2}}Q_{\nu-\frac{\mu+\xi}{2}}^{(\mu,\xi)}(z) \end{cases}$$

Ce qui redonne bien l'expression des fonctions associées généralisées de Legendre.

Relations de liaison des fonctions associées généralisées de Gegenbauer :

Dans la suite on va appliquer les formules de liaison des fonctions associées généralisées de Legendre :

$$\begin{cases} P_\nu^{\alpha,\beta}(z) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin\left(\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\dfrac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}Q_\nu^{\beta,\alpha}(-z)\right\} \\ Q_\nu^{\alpha,\beta}(z) = \dfrac{\pi}{2\, Sin\left(\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\dfrac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\nu-\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}P_\nu^{\beta,\alpha}(-z)\right\} \end{cases}$$

A partir des formules de définition des fonctions associées généralisées de Gegenbauer à l'aide des les fonctions associées généralisées de Legendre, soit la première formule, lorsque ν, λ sont quelconques et μ, ξ sont entiers :

$$\begin{cases} C_\nu^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^{\mu-\xi}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^{\mu-\xi}}\dfrac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\dfrac{\Gamma\left(\nu+2\lambda+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) \end{cases}$$

On en déduit directement les formules de liaison lorsque l'argument est inversé pour les fonctions associées généralisées de Legendre :

$$\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\to\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\quad \nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\quad \nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}$$

$$\begin{cases} P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z)+ \\ +\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\xi-\mu}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\xi,\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(-z) \end{array}\right\} \\ Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z) = \dfrac{\pi}{2\, Sin\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{array}{l} Cos\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\frac{1}{2}-\lambda-\xi}(z)- \\ -\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\xi-\mu}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda-\xi,\frac{1}{2}-\lambda-\mu}(-z) \end{array}\right\} \end{cases}$$

Ce qui donne immédiatement pour les fonctions associées généralisées de Gegenbauer :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)+(-1)^{\mu-\xi}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\} \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{\pi}{2\, Sin\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)-(-1)^{\mu-\xi}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)C_{\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\} \end{cases}$$

Et pour la deuxième formule, lorsque ν, μ, ξ sont quelconques et λ demi-entier :

$$C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) \quad C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)$$

Il vient pour les fonctions associées généralisées de Legendre :

$$\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}\to\nu+2\lambda-1+\frac{\mu+\xi}{2} \quad \nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2} \quad \nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\to\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}$$

$$\begin{cases} P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{aligned} & Cos\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)+ \\ & +\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\xi,\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(-z)\end{aligned}\right\} \\ Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z) = \dfrac{\pi}{2\, Sin\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{aligned} & Cos\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu,\lambda-\frac{1}{2}+\xi}(z)- \\ & -\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}+\xi,\lambda-\frac{1}{2}+\mu}(-z)\end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Soit pour les fonctions de Gegenbauer associées généralisées :

$$\begin{cases} C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{aligned} & Cos\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)+ \\ & +\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}C_{(Q),\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)\end{aligned}\right\} \\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \dfrac{\pi}{2\, Sin\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{\begin{aligned} & Cos\left(\left(\nu+2\lambda-1+\dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)- \\ & -\dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}C_{\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)\end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Il reste à montrer qu'en réalité ces relations sont identiques aux précédentes relations de liaisons, dans le cas où λ est demi-entier et μ, ξ sont entiers :

$$\lambda=\frac{2p+1}{2}\Rightarrow 2\lambda-1=2p\Rightarrow\begin{cases}Sin\left(\left(\nu+2\lambda-1+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)=(-1)^{\mu+\xi}Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)\\ Cos\left(\left(\nu+2\lambda-1+\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)=(-1)^{\mu+\xi}Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)+(-1)^{\mu+\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=\frac{\pi}{2\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)-(-1)^{\mu+\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)+(-1)^{\mu-\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=\frac{\pi}{2\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)-(-1)^{\mu-\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\end{cases}$$

<u>Construction des fonctions associées généralisées de Gegenbauer de deuxième espèce dans le cas du paramètre ν et μ, ξ entier</u>

Ces formules de liaisons permettent de construire les fonctions associées généralisées de Gegenbauer de deuxième espèce, également dans le cas du paramètre ν et μ, ξ entier et μ, ξ de même parité :

$$\begin{cases}C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=-\frac{2}{\pi\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)+(-1)^{\mu-\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{(Q),\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\\ C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)=\frac{\pi}{2\,Sin\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}\left\{Cos\left(\left(\nu-\frac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)C_{\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z)-(-1)^{\mu-\xi}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)C_{\nu}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\right\}\end{cases}$$

Toutefois le dénominateur s'annule lorsque ν et (μ+ξ)/2 prennent une valeur entière. Dans ce cas l'expression de la fonction de deuxième espèce présente une forme indéterminée 0/0 puisque :

$$\nu\to n\quad\frac{\mu+\xi}{2}\in\mathbf{N}\Rightarrow C_{n}^{\lambda,\xi,\mu}(-z)=(-1)^{n-\frac{\mu+\xi}{2}}2^{\mu-\xi}C_{n}^{\lambda,\mu,\xi}(z)\frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu-\xi}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{\mu-\xi}{2}\right)}\Rightarrow C_{(Q),n}^{\lambda,\xi,\mu}(z)=\frac{0}{0}$$

En utilisant la règle de l'hôpital et par passage à la limite pour les valeurs ν,μ,ξ et ν+(μ+ξ)/2 entières , il vient :

$$\nu = n, \mu, \xi, \frac{\mu+\xi}{2} \in \mathbf{N} \quad n > \frac{\mu+\xi}{2} \Rightarrow \begin{cases} n + \dfrac{\mu-\xi}{2} \in \mathbf{N} \\ n - \dfrac{\mu-\xi}{2} \in \mathbf{N} \end{cases}$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \frac{\pi}{2} \underset{\nu \to n}{Lim} \frac{\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left\{ Cos\left(\left(\nu - \dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right) C_\nu^{\lambda,\mu,\xi}(z) - (-1)^{\mu-\xi} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right) C_\nu^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)} \right\}}{\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left\{ Sin\left(\left(\nu - \dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)\right\}}$$

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \frac{1}{2} \underset{\nu \to n}{Lim} \frac{\left[\begin{array}{l} Cos\left(\left(\nu - \dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right) \dfrac{\partial C_\nu^{\lambda,\mu,\xi}(z)}{\partial \nu} - (-1)^{\mu-\xi} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)} \dfrac{\partial C_\nu^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{\partial \nu} - \\ -(-1)^{\mu-\xi} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)} C_\nu^{\lambda,\xi,\mu}(-z)\left\{\psi\left(\nu+\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)-\psi\left(\nu-\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)\right\} \end{array}\right]}{Cos\left(\left(\nu - \dfrac{\mu+\xi}{2}\right)\pi\right)}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda,\mu,\xi}(z) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial C_\nu^{\lambda,\mu,\xi}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} - (-1)^{n+\frac{\mu+\xi}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)} \left.\dfrac{\partial C_\nu^{\lambda,\xi,\mu}(-z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} - \\ -(-1)^{n+\frac{\mu+\xi}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)}{2^{\mu-\xi}\Gamma\left(\nu+\lambda+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)} C_\nu^{\lambda,\xi,\mu}(-z)\left\{\psi\left(\nu+\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)-\psi\left(\nu-\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)\right\} \end{array}\right]$$

On retrouve l'expression de la fonction généralisée associée de Legendre lorsque λ=1/2 :

$$Q_n^{\mu,\xi}(z) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\mu,\xi}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} - \dfrac{(-1)^{n+\frac{\mu+\xi}{2}}\left(n+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)!}{2^{\mu-\xi}\left(n-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)!} \left.\dfrac{\partial P_\nu^{\xi,\mu}(-z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} - \\ -\dfrac{(-1)^{n+\frac{\mu+\xi}{2}}\left(n+\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)!}{2^{\mu-\xi}\left(n-\dfrac{\mu-\xi}{2}\right)!} P_n^{\xi,\mu}(-z)\left\{\psi\left(n+\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)-\psi\left(n-\dfrac{\mu-\xi}{2}+1\right)\right\} \end{array}\right]$$

Quelques considérations sur les fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce, sur l'intervalle[-1,1] dit « On the Cut », et sur les dérivées par rapport au degré. Valeurs de la dérivée aux degrés entiers pour des ordres entiers et demi-entiers

Quelques propriétés générales des polynômes et fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce

Toutes les propriétés données dans la suite du document, sauf indication contraire s'entendent d'une valeur de z réelle, comprise en [-1,+1].

Les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielle du deuxième degré :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \quad solution\ de \quad (1-z^2)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z)\frac{dy(z)}{dz}+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)y(z)=0$$

.

Lorsque le paramètre v est entier on peut montrer que l'une des solutions, que l'on qualifie de première espèce est un polynôme de degré n. La deuxième solution indépendante est qualifiée de de fonction de Jacobi de deuxième espèce que l'on note : $Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$.

Les polynômes de Jacobi peuvent être construits à l'aide d'une formule de Rodrigues :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}\right)$$

Il y a deux représentations principales des polynômes de Jacobi à l'aide des fonctions hypergéométriques, et la seconde n'est valable que pour des degrés entiers :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Uniquement si ν *entier*

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(-\beta)\ {}_2F_1\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;\beta+1;\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\beta-\nu)}=\frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\beta-\nu)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k(k!)}\left(\frac{1+z}{2}\right)^k$$

Dans ces deux représentations, les termes $(-\nu)_k$ *s'annulent tous lorsque k est supérieur à v=n. La première représentations sert également à l'extension du polynôme de Jacobi à la fonction de Jacobi de première espèce lorsque le paramètre v est quelconque.*

La deuxième représentation n'est plus valable telle quelle lorsque le paramètre β est un entier, à ceci près que l'on peut légèrement modifier le développement comme suit :

$$\nu \in \mathbf{N} \quad P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\beta-\nu)} \, {}_2F_1\left(-\nu, \nu+\alpha+\beta+1; \beta+1; \frac{1+z}{2}\right)$$

$$Puisque \quad \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\beta-\nu)} = \frac{Sin(\pi(\nu+\beta))}{Sin(\pi\beta)} \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta)Sin(\pi\beta) = \Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(-\beta-\nu)Sin(\pi(\nu+\beta))$$

$$et \quad \Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta) = \Gamma(\varsigma)\Gamma(1-\varsigma) = \frac{\pi}{Sin(\pi\,\varsigma)} = \frac{\pi}{Sin(\pi(\beta+1))} = -\frac{\pi}{Sin(\pi\beta)} \quad avec \quad \varsigma = \beta+1$$

$$\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(-\beta-\nu) = \Gamma(\varsigma)\Gamma(1-\varsigma) = \frac{\pi}{Sin(\pi\,\varsigma)} = \frac{\pi}{Sin(\pi(\nu+\beta+1))} = -\frac{\pi}{Sin(\pi(\nu+\beta))} \quad avec \quad \varsigma = \nu+\beta+1$$

$$\Rightarrow \nu \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \frac{Sin(\pi(\nu+\beta))}{Sin(\pi\beta)} = (-1)^\nu \quad P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\beta+1)} \, {}_2F_1\left(-\nu, \nu+\alpha+\beta+1; \beta+1; \frac{1+z}{2}\right)$$

La formule de construction de la seconde solution « on the cut » à l'aide d'un développement en série hypergéométrique, trouvée dans l'ouvrage de Erdelyi « A.Erdelyi.H.Bateman-HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_II » page 171 formule 22 :

$$Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + \frac{2^{\alpha+\beta-1} Cos(\alpha\pi)}{(1-z)^\alpha (1+z)^\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1+\beta)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} \, {}_2F_1\left(\nu+1, -\nu-\alpha-\beta; 1-\alpha; \frac{1-z}{2}\right)$$

L'expression précédente a le gros inconvénient de ne pas être définie explicitement lorsque le paramètre α est entier. Mais il est possible d'effectuer un passage à la limite qui permet de définir l'expression de la fonction de deuxième espèce. Une autre méthode consiste à dériver explicitement la fonction à partir d'une de ses représentation intégrale.

Calcul explicite de la fonction de Jacobi de deuxième espèce dans le cas des paramètres ν α,β tous entiers

On sait que lorsque les paramètres ν α,β sont entiers que la fonction de deuxième espèce poosède la représentation intégrale suivante :

$$z \in \mathbf{C} - \{[-1+1]\} \quad Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}(z-1)^\alpha (z+1)^\beta} \int_{-1}^{+1} dt \frac{(1-t)^{\nu+\alpha}(1+t)^{\nu+\beta}}{(z-t)^{\nu+1}}$$

$$\nu,\alpha,\beta \in \mathbf{N} \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad (1-t)^{\nu+\alpha}(1+t)^{\nu+\beta} = \sum_{k=0}^{k=2\nu+\alpha+\beta} \frac{\mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)(t-z)^k}{k!} \qquad \mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{d^k\{(1-z)^{\nu+\alpha}(1+z)^{\nu+\beta}\}}{dz^k}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}(z-1)^\alpha (z+1)^\beta} \sum_{k=0}^{k=2\nu+\alpha+\beta} \frac{\mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)}{k!}(-1)^k \int_{-1}^{+1} dt (z-t)^{k-\nu-1}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}(z-1)^\alpha (z+1)^\beta} \left\{ \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu}}^{k=2\nu+\alpha+\beta} \frac{\mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)}{k!}(-1)^k \int_{-1}^{+1} dt (z-t)^{k-\nu-1} + \frac{\mu_{\nu,\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\nu!}(-1)^\nu \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{z-t} \right\}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^\alpha (1-z)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}}{2^{\nu+1}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu}}^{k=2\nu+\alpha+\beta} \frac{\mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)}{(k-\nu)k!}\left[(-1)^k (z+1)^{k-\nu} - (-1)^\nu (1-z)^{k-\nu}\right] + \\ \displaystyle +(-1)^\nu \frac{\mu_{\nu,\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\nu!} Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \end{array} \right\}$$

$$Sur\ la\ coupure\ x \in [-1+1] \quad Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}\left(Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x+i0) + Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x-i0)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2}\left(Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x+i\varepsilon) + Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x-i\varepsilon)\right)$$

$$Comme \quad \mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)(z+1)^{k-\nu} \to \mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(x)(1+x)^{k-\nu} \quad \mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(z)(1-z)^{k-\nu} \to \mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{k-\nu}$$

$$Et \quad \mu_{\nu,\nu}^{(\alpha,\beta)}(z) Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \to \mu_{\nu,\nu}^{(\alpha,\beta)}(x) Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^\alpha (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{2^{\nu+1}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu}}^{k=2\nu+\alpha+\beta} \frac{\mu_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(k-\nu)k!}\left[(-1)^k (1+x)^{k-\nu} - (-1)^\nu (1-x)^{k-\nu}\right] + \\ \displaystyle +(-1)^\nu \frac{\mu_{\nu,\nu}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\nu!} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array} \right\}$$

On peut également utiliser une récurrence à partir de l'expression suivantes :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) Q_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(x) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^\alpha \frac{2^{\alpha+\beta}(2\nu+\alpha+\beta)\Gamma(\nu+\alpha)\Gamma(\nu+\beta)}{\nu!\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(x)}\left\{ P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) Q_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - (-1)^\alpha \frac{2^{\alpha+\beta}(2\nu+\alpha+\beta)\Gamma(\nu+\alpha)\Gamma(\nu+\beta)}{\nu!\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \right\} \\ \displaystyle Départ \quad Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^\alpha}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{(-1)^\alpha (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{2} \sum_{k=1}^{k=\alpha+\beta} \frac{\mu_{0,k}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(k)k!}\left[(-1)^k (1+x)^k - (1-x)^k\right] \\ \displaystyle Avec \quad \mu_{0,k}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{d^k\{(1-z)^\alpha (1+z)^\beta\}}{dz^k} \end{array} \right.$$

.

Lien avec les fonctions associées généralisées de Legendre

Les fonctions associées généralisées de Legendre sont liées aux fonctions de Jacobi de la manière suivantes :

$$\begin{cases} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\beta \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}} P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{-\alpha,-\beta}(z) \\ P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\alpha \dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}} \left\{ Cos(\alpha\pi) P_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z) - \dfrac{2}{\pi} Sin(\alpha\pi) Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z) \right\} \\ Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\alpha \dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}} Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z) \end{cases}$$

Partant du lien entre les fonctions de deuxième espèce, et de l'expression en fonctions hypergéométrique, il vient une autre expression de la fonction de Jacobi de deuxième espèce en terme hypergéométrique:

$$Q_\nu^{\alpha,\beta}(z) = \frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)} \left\{ \begin{array}{l} Cos(\alpha\pi) \dfrac{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}} \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}, \nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1; 1-\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-\alpha)} - \\ -\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2^{\alpha-\beta}} \dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)} \dfrac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}} \times \\ \times \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}, \nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$Q_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(z) = \frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)} \left\{ \begin{array}{l} Cos(\alpha\pi) \dfrac{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}} \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\alpha, \nu+\beta+1; 1-\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-\alpha)} - \\ -\dfrac{1}{2^{\alpha-\beta}} \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\beta+1)} \dfrac{(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}} \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\beta, \nu+\alpha+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\pi}{2Sin(\alpha\pi)} \left\{ \begin{array}{l} 2^\alpha Cos(\alpha\pi) \dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} (1-z)^{-\alpha} \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\alpha, \nu+\beta+1; 1-\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1-\alpha)} - \\ -2^\beta \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)} (1+z)^{-\beta} \dfrac{{}_2F_1\left(-\nu-\beta, \nu+\alpha+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)} \end{array} \right\}.$$

On tire également les relations suivantes de ce qui précèdent :

$$P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=2^{\beta}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}P_{\nu}^{-\alpha,-\beta}(z)$$

$$\Rightarrow P_{\nu}^{-\alpha,-\beta}(z)=2^{-\beta}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{+\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{+\frac{\beta}{2}}P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z)=2^{\beta}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}P^{(-\alpha,-\beta)}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)$$

$$Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=2^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}Q_{\nu}^{\alpha,\beta}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu}^{\alpha,\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{+\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{+\frac{\beta}{2}}Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu}^{\alpha,-\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{+\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}Q^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu}^{-\alpha,-\beta}(z)=2^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}Q^{(-\alpha,-\beta)}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)=2^{\alpha}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}Cos(\alpha\pi)P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\Rightarrow P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)Cos(\alpha\pi)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}\left\{P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow P_{\nu}^{\alpha,\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)Cos(\alpha\pi)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}\left\{P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow P_{\nu}^{\alpha,-\beta}(z)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)Cos(\alpha\pi)}(1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{-\frac{\beta}{2}}\left\{P^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\}$$

.

Tous ces liens vont permettre de construire les formules de connexion pour les fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce. En effet, partant des formules de connexion des fonctions associées généralisées de Legendre, il vient :

$$\begin{cases} \nu \to \nu + \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ (1)\quad \dfrac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) = -\left\{ Cos((\nu+\alpha+\beta)\pi) Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) + \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma(\nu+\beta+1)} Q^{\beta,\alpha}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(-z) \right\} \\ (2)\quad \dfrac{2}{\pi} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) = Cos((\nu+\alpha+\beta)\pi) P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) - \dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{2^{\alpha-\beta}\Gamma(\nu+\beta+1)} P^{\beta,\alpha}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(-z) \end{cases}$$

$$Comme \quad \begin{cases} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\alpha \dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} (1-z)^{-\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{-\frac{\beta}{2}} \left\{ Cos(\alpha\pi) P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) - \dfrac{2}{\pi} Sin(\alpha\pi) Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) \right\} \\ Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\alpha \dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} (1-z)^{-\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{-\frac{\beta}{2}} Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) \end{cases}$$

$$On\ a \Rightarrow P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = 2^\alpha \frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} (1-z)^{-\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{-\frac{\beta}{2}} Cos(\alpha\pi) P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) - \frac{2}{\pi} Sin(\alpha\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) = 2^{-\alpha} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1) Cos(\alpha\pi)} \left\{ P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + \frac{2}{\pi} Sin(\alpha\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \right\}$$

$$Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) = 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{\frac{\beta}{2}} Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$Q^{\beta,\alpha}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(-z) = 2^{-\beta} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{\frac{\beta}{2}} Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

$$P^{\beta,\alpha}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(-z) = 2^{-\beta} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}} (1+z)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1) Cos(\beta\pi)} \left\{ P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) + \frac{2}{\pi} Sin(\beta\pi) Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) \right\}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi)}{Cos(\alpha\pi)} \left\{ \frac{\pi}{2} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + Sin(\alpha\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \right\} = -\left\{ Cos((\nu+\alpha+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) \right\}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \begin{bmatrix} -\{ Cos(\alpha\pi) Cos((\nu+\alpha+\beta)\pi) + Sin(\alpha\pi) Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) \} Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) - \\ - Cos(\alpha\pi) Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) \end{bmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + Cos(\alpha\pi) Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) \right)$$

$$\Rightarrow Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) = -\frac{1}{Cos(\alpha\pi)} \left(\frac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \right)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{2}{\pi} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{Cos((\nu+\alpha+\beta)\pi)}{Cos(\alpha\pi)} \left\{ P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) + \frac{2}{\pi} Sin(\alpha\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \right\} -$$

$$-\frac{\left\{ P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) + \dfrac{2 Sin(\beta\pi)}{\pi} Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) \right\}}{Cos(\beta\pi)} \Rightarrow \frac{2 Sin(\nu\pi)}{\pi} Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = Cos((\nu+\alpha)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) - Cos(\alpha\pi) P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

Les formules de connexion entre fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce sur l'argument sont donc les suivantes (noter les inversions de paramètres α et β) :

$$\frac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = -Cos(\alpha\pi) Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) - Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\frac{2}{\pi} Sin(\nu\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = Cos((\nu+\alpha)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) - Cos(\alpha\pi) P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

Les liens suivant portent sur les ordres, et après quelques calculs mettant en jeu les relations précédentes sur les fonctions associées généralisées de Legendre et les fonctions de Jacobi, deviennent :

$$(1)\quad P_\nu^{-\alpha,-\beta}(z)=2^{\alpha-\beta}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\}$$

$$(2)\quad Q_\nu^{-\alpha,-\beta}(z)=2^{\alpha-\beta}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\}$$

$$(1)\Rightarrow 2^{\alpha+\beta}Cos(\alpha\,\pi)P^{(-\alpha,-\beta)}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\left\{P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}$$

$$(2)\Rightarrow 2^{\alpha+\beta}Cos(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,-\beta)}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\left\{Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}.$$

L'utilisation des autres liens sur les fonctions associées généralisées de Legendre permet de produire d'autres formules :

$$\begin{cases} P_\nu^{-\alpha,\beta}(z)=2^{\alpha}\,\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)Cos(\alpha\pi)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}\left\{P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\} \\ Q_\nu^{-\alpha,\beta}(z)=2^{\alpha}\,\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}(1-z)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{+\frac{\beta}{2}}Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z) \end{cases}$$

$$(1)\quad P_\nu^{-\alpha,\beta}(z)=2^{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\}$$

$$(1)\Rightarrow P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\frac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\}$$

$$(2)\quad Q_\nu^{-\alpha,\beta}(z)=2^{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Cos(\alpha\,\pi)Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)+\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\right\}$$

$$(2)\Rightarrow Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=\frac{2^{-\alpha}(1-z)^{\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}.$$

Des calculs précédent, on en déduit :

$$P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=\frac{2^{-\alpha}(1-z)^{\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}.$$

Ce qui permet de déduire la dernière de ces relations :

$$Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\frac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\}.$$

Résumé les deux groupes de relation :

$$\begin{cases}P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=\frac{2^{-\alpha}(1-z)^{\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}\\ Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=\frac{2^{-\alpha}(1-z)^{\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\left\{Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)+\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\frac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\}\\ Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\frac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\frac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\}\end{cases}.$$

Il reste à traiter les deux autres relations qui donnent immédiatement :

$$\begin{cases}P^{\alpha,-\beta}_{\nu}(z)=2^{-\beta}P^{\alpha,\beta}_{\nu}(z)\\ Q^{\alpha,-\beta}_{\nu}(z)=2^{-\beta}Q^{\alpha,\beta}_{\nu}(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=2^{-\beta}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\\ Q^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=2^{-\beta}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\end{cases}.$$

Wronskien des fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce

A partir du Wronskien des fonctions associées généralisées de Legendre, on en déduit le Wronskien des fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce :

$$W\{P_\nu^{\alpha,\beta}(z),Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)\}=\frac{dP_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}Q_\nu^{\alpha,\beta}(z)-P_\nu^{\alpha,\beta}(z)\frac{dQ_\nu^{\alpha,\beta}(z)}{dz}=\frac{2^{\beta-\alpha}}{1-z^2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}$$

$$W\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z),Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)\}=\left\{2^\alpha\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\right\}^2(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}Cos(\alpha\pi)W\left\{P^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z),Q^{\alpha,\beta}_{\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow W\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z),Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)\}=\frac{2^{\alpha+\beta}Cos(\alpha\pi)\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}(1+z)^{\beta+1}}$$

$$Si\quad\alpha\quad entier\Rightarrow W\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z),Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)\}=\frac{(-1)^\alpha 2^{\alpha+\beta}\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}(1+z)^{\beta+1}}.$$

Calcul de la fonction de deuxième espèce à l'aide des formules de liaison

En utilisant les formules de liaison entre fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce sur l'argument, on peut calculer la fonction de deuxième espèce,

$$\begin{cases}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=-\frac{2}{\pi\ Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi)}\{Cos((\nu+\beta)\pi)Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+Cos(\alpha\pi)Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)\}\\ Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\pi}{2Sin(\nu\pi)}\{Cos((\nu+\alpha)\pi)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)-Cos(\alpha\pi)P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)\}\end{cases}$$

$$\nu=n\in\mathbf{N}\Rightarrow Cos(\alpha\pi)P_n^{(\beta,\alpha)}(-z)=Cos((n+\alpha)\pi)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\Rightarrow P_n^{(\beta,\alpha)}(-z)=(-1)^nP_n^{(\alpha,\beta)}(z)\Rightarrow P_n^{(\alpha,\beta)}(-z)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(z)$$

Toutefois le dénominateur s'annule lorsque v prend une valeur entière. Dans ce cas l'expression de la fonction de deuxième espèce présente une forme indéterminée 0/0 puisque :

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(-z)=(-1)^nP_n^{(\alpha,\beta)}(z)\Rightarrow Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{0}{0}$$

En utilisant la règle de l'hôpital et par passage à la limite pour les valeurs v entières , il vient :

$$\nu=n\Rightarrow Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\{Cos((\nu+\alpha)\pi)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)-Cos(\alpha\pi)P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)\}}{\frac{\partial}{\partial\nu}\{Sin(\nu\pi)\}}$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{\left[Cos((\nu+\alpha)\pi)\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\pi\ Sin((\nu+\alpha)\pi)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)-Cos(\alpha\pi)\frac{\partial P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)}{\partial\nu}-\right]}{\pi\ Cos(\nu\pi)}$$

$$\Rightarrow Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{1}{2}\left\{Cos(\alpha\pi)\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^n\left.\frac{\partial P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}-\pi\ Sin(\alpha\pi)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\right\}.$$

Lorsque le paramètre α est entier, l'expression de la fonction de deuxième espèce se réduit à :

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^\alpha}{2}\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^n\left.\frac{\partial P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}.$$

Dans la suite on établi les liens entre les fonctions de Jacobi et les fonctions de Legendre qui devient lorsque le paramètre β est entier :

$$\left.\begin{matrix}\beta \quad entier\\ \beta=-\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(z)\\[2ex] Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}(-1)^\beta Q_\nu^\beta(z)\end{cases}$$

Ce qui permet de retrouver l'expression de la fonction de deuxième espèce de Legendre associée dans les cas ou α=-β est entier :

$$\alpha=-\beta\in\mathbf{N}\Rightarrow(1)\quad Q_n^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{(-1)^\beta}{2}\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^n\left.\frac{\partial P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}$$

$$P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(z)\quad P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)=\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{-\beta}(-z)$$

$$Or\ P_\nu^{-\beta}(-z)=(-1)^\beta\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^\beta(-z)\Rightarrow P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)=\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}(-1)^\beta P_\nu^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)}{\partial\nu}=\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{\partial P_\nu^\beta(z)}{\partial\nu}+\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(z)\{\psi(\nu-\beta+1)-\psi(\nu+1)\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}(-1)^\beta\dfrac{\partial P_\nu^\beta(-z)}{\partial\nu}+\\[2ex] +(-1)^\beta\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(-z)\{\psi(\nu-\beta+1)-\psi(\nu+1)\}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)}{\partial\nu}=\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial P_\nu^\beta(z)}{\partial\nu}-(-1)^{n+\beta}\dfrac{\partial P_\nu^\beta(-z)}{\partial\nu}+\\ +\{P_\nu^\beta(z)-(-1)^{n+\beta}P_\nu^\beta(-z)\}\{\psi(\nu-\beta+1)-\psi(\nu+1)\}\end{matrix}\right\}$$

$$Comme\quad P_n^\beta(z)=(-1)^{n+\beta}P_n^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^n\left.\frac{\partial P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^\beta(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^{n+\beta}\left.\frac{\partial P_\nu^\beta(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}$$

$$De\ plus\ Q_n^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}(-1)^\beta Q_n^\beta(z)$$

$$(1)\Rightarrow\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}(-1)^\beta Q_n^\beta(z)=\frac{(-1)^\beta}{2}\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^n\left.\frac{\partial P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}$$

$$\Rightarrow Q_n^\beta(z)=\frac{1}{2}\left\{\left.\frac{\partial P_\nu^\beta(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^{n+\beta}\left.\frac{\partial P_\nu^\beta(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\beta=m\\ Q_n^m(z)=\dfrac{1}{2}\left[\left.\dfrac{\partial P_\nu^m(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}-(-1)^{n+m}\left.\dfrac{\partial P_\nu^m(-z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right]\end{cases}$$

.

Lien de quelques polynômes orthogonaux et fonctions hypergéométriques avec les polynômes de Jacobi

Lien avec les fonctions associées généralisées de Legendre

Les liens avec les fonctions associées généralisées de Legendre ont déjà été amplement utilisés dans la section précédente. Ici on va plus particulièrement fixer les paramètres permettant de retrouver les fonctions de Legendre associées, soit si α = - β et α entier, il vient :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=-\beta\\ P_\nu^{\beta,-\beta}(z)=2^{-\beta}P_\nu^{\beta,\beta}(z)\Rightarrow P_\nu^{-\beta,\beta}(z)=2^{\beta}P_\nu^{-\beta,-\beta}(z)\\ Q_\nu^{\beta,-\beta}(z)=2^{-\beta}Q_\nu^{\beta,\beta}(z)\\ Q_\nu^{-\beta,\beta}(z)=2^{\beta}Q_\nu^{-\beta,-\beta}(z)\\ Q_\nu^{-\beta,-\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left\{Cos(\beta\,\pi)Q_\nu^{\beta,\beta}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_\nu^{\beta,\beta}(z)\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=2^{\beta}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{\beta,-\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{\beta,\beta}(z)\\ P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{Cos(\alpha\pi)P_\nu^{-\beta,\beta}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q_\nu^{-\beta,\beta}(z)\right\}\\ Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_\nu^{-\beta,\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_\nu^{-\beta,-\beta}(z)\\ =\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{Cos(\beta\,\pi)Q_\nu^{\beta,\beta}(z)+\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_\nu^{\beta,\beta}(z)\right\}\end{cases}$$

$$\textit{De plus}\quad P_\nu^{\beta,\beta}(z)=P_\nu^{\beta}(z)\quad et\quad Q_\nu^{\beta,\beta}(z)=Q_\nu^{\beta}(z)$$

On en tire les deux relations qui définissent le lien des fonctions de Jacobi de première et deuxième espèce avec les fonctions de Legendre associées de première et deuxième espèce :

$$\begin{cases}P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{\beta}(z)\\ Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_\nu^{\beta}(z)+Cos(\beta\,\pi)Q_\nu^{\beta}(z)\right\}\end{cases}$$

Qui peuvent également s'écrire de manière inverse :

$$\begin{cases}P_\nu^{\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)\\ Q_\nu^{\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)Cos(\beta\,\pi)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)\right\}\end{cases}.$$

Pour ce qui est de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi, appliqué aux valeurs spéciales donnant les fonctions de Legendre associées de première espèce :

$$\alpha=-\beta \Rightarrow \chi=\nu \qquad \eta=\nu+\beta \qquad \gamma=\nu-\beta \qquad \delta=\nu$$

$$P_\nu^{-\beta,\beta}(z)=\frac{(-1)^{\nu-\beta}}{2^\gamma(\nu+\beta)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left((1-z)^{\nu-\beta}(1+z)^{\nu+\beta}\right)$$

On retrouve bien la formule de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi, appliquée au cas des fonctions associées de Legendre :

$$P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{(-1)^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\beta}\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left((1-z)^{\nu-\beta}(1+z)^{\nu+\beta}\right)$$

$$\Rightarrow P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{(-1)^\nu}{2^\nu\nu!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\beta}\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left((1-z)^{\nu-\beta}(1+z)^{\nu+\beta}\right)$$

$$Puisque \quad P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(1+\nu-\beta)}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(z)$$

$$\Rightarrow P_\nu^{\beta}(z)=\frac{(-1)^\nu}{2^\nu(\nu-\beta)!}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left((1-z)^{\nu-\beta}(1+z)^{\nu+\beta}\right)$$

<u>Lien avec les fonctions de Legendre associées</u>

Les polynômes/fonctions associés de Legendre sont liés aux polynômes de Jacobi, lorsque les paramètres sont liés par la relation, α=-β, comme suit :

$$\alpha=-\beta \Rightarrow P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{(1-z)^{\frac{\beta}{2}}}{(1+z)^{\frac{\beta}{2}}}P_\nu^\beta(z) \quad z\in[-1,1]\Rightarrow P_\nu^{(0,0)}(z)=P_\nu(z)$$

$$\beta=-\alpha \Rightarrow P_\nu^{(\alpha,-\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{(1+z)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z)^{\frac{\beta}{2}}}P_\nu^{-\alpha}(z) \quad z\in[-1,1]$$

Le lien avec la seconde solution n'est pas similaire, en effet nous avons vu que :

$$\begin{cases} P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^\beta(z) \\ Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\pi)P_\nu^\beta(z)+Cos(\beta\pi)Q_\nu^\beta(z)\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_\nu^{\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) \\ Q_\nu^{\beta}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)Cos(\beta\pi)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\pi)P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z)\right\} \end{cases}$$

En prenant ces valeurs de paramètre, on retrouve bien les formules de connexion des fonctions associées de Legendre. Pour cela on commence par établir ces quelques relations lorsque α=β :

$$\begin{cases} P_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)=\dfrac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{P_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(-\alpha,\beta)}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(-\alpha,\beta)}(z)\right\} \\ P_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(\alpha,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}P_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z) \\ Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z)=\dfrac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{Q_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(-\alpha,\beta)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(-\alpha,\beta)}(z)\right\} \\ Q_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}^{(\alpha,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}Q_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(z) \end{cases}$$

$$Si\ \alpha=\beta\Rightarrow\begin{cases} P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=\dfrac{2^{\beta}(1-z)^{-\beta}}{Cos(\beta\pi)}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}\left\{P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\beta\pi)Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\right\} \\ P_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}(1+z)^{\beta}P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \\ \Rightarrow P_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=\dfrac{1}{Cos(\beta\pi)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\beta}\left\{P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\beta\pi)Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\right\} \\ \Rightarrow P_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(-z)=\dfrac{1}{Cos(\beta\pi)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\beta}\left\{P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(-z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\beta\pi)Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(-z)\right\} \\ Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=\dfrac{2^{\beta}(1-z)^{-\beta}}{Cos(\beta\pi)}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}\left\{Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\right\} \\ Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}(1+z)^{\beta}Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \\ \Rightarrow Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=\dfrac{1}{Cos(\beta\pi)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\beta}\left\{Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\right\} \\ \Rightarrow Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(-z)=\dfrac{1}{Cos(\beta\pi)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\beta}\left\{Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(-z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\beta\,\pi)P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(-z)\right\} \end{cases}$$

Lorsque α=-β, en réalité on retombe sur les mêmes relations :

$$\begin{cases} P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\dfrac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\} \\ P^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}P^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) \\ Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z)=\dfrac{2^{\alpha}(1-z)^{-\alpha}}{Cos(\alpha\pi)}\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\left\{Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)\right\} \\ Q^{(\alpha,-\beta)}_{\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}(1+z)^{\beta}Q^{(\alpha,\beta)}_{\nu-\frac{\alpha+\beta}{2}}(z) \end{cases}$$

$$Si\ \alpha=-\beta\Rightarrow\begin{cases} P^{(-\beta,\beta)}_{\nu}(z)=\dfrac{2^{-\beta}(1-z)^{\beta}}{Cos(\beta\pi)}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}\left\{P^{(-\alpha,\beta)}_{\nu-\beta}(z)-\dfrac{2}{\pi}Sin(\alpha\pi)Q^{(-\alpha,\beta)}_{\nu-\beta}(z)\right\} \\ P^{(-\beta,-\beta)}_{\nu+\beta}(z)=2^{-\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}(1+z)^{\beta}P^{(-\beta,\beta)}_{\nu}(z) \\ Q^{(-\beta,\beta)}_{\nu}(z)=\dfrac{2^{-\beta}(1-z)^{\beta}}{Cos(\beta\pi)}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}\left\{Q^{(\beta,\beta)}_{\nu-\beta}(z)-\dfrac{\pi}{2}Sin(\alpha\,\pi)P^{(\beta,\beta)}_{\nu-\beta}(z)\right\} \\ Q^{(-\beta,-\beta)}_{\nu+\beta}(z)=2^{-\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}(1+z)^{\beta}Q^{(-\beta,\beta)}_{\nu}(z) \end{cases}$$

.

Et lorsque α=β sont entiers alors les relations se simplifient :

$$\begin{cases}\begin{cases}P_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}(1-z)^{\beta}(-1)^{\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}P_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)\\ P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=2^{\beta}(1-z)^{-\beta}(-1)^{\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\end{cases}\\ P_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=(-1)^{\beta}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\beta}P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\Rightarrow P_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-2\beta}(-1)^{\beta}\left(1-z^2\right)^{\beta}P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\\ \begin{cases}Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}(1-z)^{\beta}(-1)^{\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)\\ Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=2^{\beta}(1-z)^{-\beta}(-1)^{\beta}\dfrac{(\Gamma(\nu+1))^2}{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\end{cases}\\ Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=(-1)^{\beta}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\beta}Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)\Rightarrow Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-2\beta}(-1)^{\beta}\left(1-z^2\right)^{\beta}Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\end{cases}.$$

Soit deux relations importantes des fonctions de Jacobi au demeurant bien connu lorsque les paramètre α=β sont entiers :

$$\begin{cases}P_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-2\beta}(1-z)^{2\beta}P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\\ Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)=2^{-2\beta}(1-z)^{2\beta}Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\end{cases}$$

.

Ce qui donne compte tenu des liaisons entre fonctions de Jacobi et de Legendre associées :

$$\begin{cases} P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} P_\nu^\beta(z) \\ Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} \left\{\dfrac{\pi}{2} Sin(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(z) + Cos(\beta\,\pi) Q_\nu^\beta(z)\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} \left\{Cos(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(-z) - \dfrac{2}{\pi} Sin(\beta\pi) Q_\nu^\beta(-z)\right\} \\ Q_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} Q_\nu^\beta(-z) \Leftrightarrow Q_\nu^{(\beta,-\beta)}(z) = \dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}} Q_\nu^\beta(z) \end{cases}$$

En injectant toutes ces relations dans les deux formules de liaison suivantes, il vient :

$$\frac{\pi}{2} Sin((\nu+\alpha+\beta)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = -Cos(\alpha\pi) Q_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z) - Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$\frac{2}{\pi} Sin(\nu\pi) Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = Cos((\nu+\alpha)\pi) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) - Cos(\alpha\pi) P_\nu^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

.

avec α=- β, il vient :

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{\pi}{2} Sin(\nu\pi) P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = -Cos(\beta\pi) Q_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z) - Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) \\ (2) \quad \dfrac{2}{\pi} Sin(\nu\pi) Q_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) = Cos((\nu-\beta)\pi) P_\nu^{(-\beta,\beta)}(z) - Cos(\beta\pi) P_\nu^{(\beta,-\beta)}(-z) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\pi}{2}\{Sin(\nu\pi) + Cos((\nu+\beta)\pi) Sin(\beta\,\pi)\} P_\nu^\beta(z) = -Cos(\beta\pi) Q_\nu^\beta(-z) - Cos((\nu+\beta)\pi) Cos(\beta\,\pi) Q_\nu^\beta(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} Cos(\beta\,\pi) Sin((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) = -Cos(\beta\pi) Q_\nu^\beta(-z) - Cos((\nu+\beta)\pi) Cos(\beta\,\pi) Q_\nu^\beta(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} Sin((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) = -\{Q_\nu^\beta(-z) + Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z)\}$$

$$\Rightarrow Q_\nu^\beta(-z) = -\left\{\frac{\pi}{2} Sin((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) + Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z)\right\}$$

$$(2) \Rightarrow Cos(\nu\pi) P_\nu^\beta(z) - \frac{2}{\pi} Sin(\nu\pi) Q_\nu^\beta(z) = Cos(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(-z) - \frac{2}{\pi} Sin(\beta\pi) Q_\nu^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow \{Cos(\nu\pi) - Sin((\nu+\beta)\pi) Sin(\beta\pi)\} P_\nu^\beta(z) - \frac{2}{\pi}\{Sin(\nu\pi) + Sin(\beta\pi) Cos((\nu+\beta)\pi)\} Q_\nu^\beta(z) = Cos(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow Cos(\beta\pi) Cos((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) - \frac{2}{\pi} Cos(\beta\pi) Sin((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z) = Cos(\beta\,\pi) P_\nu^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow Cos((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) - \frac{2}{\pi} Sin((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z) = P_\nu^\beta(-z)$$

$$\Rightarrow P_\nu^\beta(-z) = Cos((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) - \frac{2}{\pi} Sin((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z)$$

Ce qui coïncide exactement avec les formules de connexion connues pour les fonctions de Legendre associées :

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} Sin((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) = -\{Cos((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z) + Q_\nu^\beta(-z)\} \\ \dfrac{2}{\pi} Sin((\nu+\beta)\pi) Q_\nu^\beta(z) = Cos((\nu+\beta)\pi) P_\nu^\beta(z) - P_\nu^\beta(-z) \end{cases}$$

Lien avec les fonctions de Gegenbauer de première espèce (polynômes) et deuxième espèce

Les polynômes/fonctions Gegenbauer de première espèce sont liés aux polynômes/fonctions de Jacobi de première espèce comme suit :

$$P_\nu^{(\alpha,\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+1+\nu)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1+\nu)}C_\nu^{\alpha+\frac{1}{2}}(z)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\alpha+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\alpha+1=2\lambda\\ C_\nu^\lambda(z)=\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma(2\lambda)}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)\end{cases}.$$

On a construit dans cet ouvrage les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce, à l'aide des fonctions de Legendre associées, comme suit :

$$\left.\begin{aligned}C_\nu^\lambda(z)&=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\\ C_{(Q),\nu}^\lambda(z)&=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\end{aligned}\right\}\quad z\in\left]-1,1\right[$$

Ceci permet de trouver le lien entre les fonctions de Gegenbauer et Jacobi de première et deuxième espèce. On peut voir que le premier lien entre fonctions de première espèce (Legendre associées et Jacobi) est bien valide :

$$\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma(2\lambda)}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)}\Rightarrow P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=\frac{2^{\frac{2\lambda-1}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu\right)}{\Gamma(\nu+1)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$Comme\quad\begin{cases}P_\nu^{(\beta,-\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{-\frac{\beta}{2}}P_\nu^{-\beta}(z)\\ P_\nu^{(\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}(1+z)^\beta P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=2^\beta\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\beta+1)}P_\nu^{-\beta}(z)\Rightarrow P_\nu^{(\beta,\beta)}(z)=2^\beta\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}P_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)$$

$$Si\quad\beta=\lambda-\frac{1}{2}\Rightarrow P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=2^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\Rightarrow P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=2^{\frac{1}{2}-\lambda}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)\Rightarrow C_\nu^\lambda(z)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_\nu^\lambda(z)=\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)$$

.

Pour la fonction de deuxième espèce, on a :

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\text{Comme}\quad\begin{cases}Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_{\nu}^{\beta}(z)\\ Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\,\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}(1+z)^{\beta}\,Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}2^{\beta}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}Q_{\nu}^{\beta}(z)\Rightarrow Q_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+2\beta+1)}2^{\beta}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}Q_{\nu+\beta}^{\beta}(z)$$

$$\beta=\lambda-\frac{1}{2}\Rightarrow Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=2^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)=2^{\frac{1}{2}-\lambda}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)$$

$$\text{De plus}\quad Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)=\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)}\left\{\frac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)+Sin(\lambda\pi)Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=\frac{1}{Sin(\lambda\pi)}\left\{\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)-\frac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\left\{\frac{1}{Sin(\lambda\pi)}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2\lambda)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)-\frac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2Sin(\lambda\pi)}P_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=-\frac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2Sin(\lambda\pi)}C_{\nu}^{\lambda}(z)+\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}\frac{1}{Sin(\lambda\pi)}Q_{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}^{\lambda-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=-\frac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2Sin(\lambda\pi)}C_{\nu}^{\lambda}(z)+\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\frac{Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)}{Sin(\lambda\pi)}$$

Résumons donc ces deux liens établis :

$$\begin{cases}P_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=\dfrac{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}C_{\nu}^{\lambda}(z)\\ Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=Sin(\lambda\pi)\dfrac{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}\left\{C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)+\dfrac{\pi\,Cos(\lambda\pi)}{2Sin(\lambda\pi)}C_{\nu}^{\lambda}(z)\right\}\end{cases}$$

Au passage on peut également construire le lien suivant :

$$C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{2^{\frac{1-2\lambda}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)$$

$$\begin{cases}Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_{\nu}^{\beta}(z)\Rightarrow Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,\beta)}(z)=\dfrac{\Gamma(\nu+2\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)\\ Q_{\nu}^{(\beta,-\beta)}(z)=2^{-\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+\beta+1)\Gamma(\nu-\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}(1+z)^{\beta}Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z)\\ \Rightarrow Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z)=2^{\beta}\dfrac{\Gamma(\nu-\beta+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{(\Gamma(\nu+1))^2}(1+z)^{-\beta}Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)\\ \Rightarrow Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,\beta)}(z)=2^{\beta}\dfrac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2\beta+1)}{(\Gamma(\nu+\beta+1))^2}(1+z)^{-\beta}Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\Gamma(\nu+2\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)=2^{\beta}\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2\beta+1)}{(\Gamma(\nu+\beta+1))^2}(1+z)^{-\beta}Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)$$

$$\Rightarrow Q_{\nu+\beta}^{-\beta}(z)=2^{\beta}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\left(1-z^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z)$$

$$\beta=\lambda-\frac{1}{2}\Rightarrow Q_{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(z)=2^{\frac{2\lambda-1}{2}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}Q_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}Q_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z)$$

$$\Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z)=2^{2\lambda-1}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(1-z^2\right)^{\frac{1-2\lambda}{2}}Q_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z)$$

.

Montrons que l'on retrouve bien les formules de connexion pour les fonctions de Gegenbauer de première et deuxième espèce :

$$\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=2\lambda-1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}Sin((\nu+2\lambda-1)\pi)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=-Cos\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(-z)-Cos\left(\left(\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)\\ \frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=Cos\left(\left(\nu+\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)-Cos\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\pi\right)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1)\quad\frac{\pi}{2}Sin((\nu+2\lambda)\pi)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=Sin(\lambda\pi)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(-z)+Sin((\nu+\lambda)\pi)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)\\ (2)\quad\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=Sin((\nu+\lambda)\pi)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)-Sin(\lambda\pi)P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(-z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}C_\nu^\lambda(z)\\ Q_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z)=Sin(\lambda\pi)\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}\left\{C_{(Q),\nu}^\lambda(z)+\frac{\pi\ Cos(\lambda\pi)}{2Sin(\lambda\pi)}C_\nu^\lambda(z)\right\}\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow\left\{\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)+Sin(\nu\pi)Cos(\lambda\pi)C_\nu^\lambda(z)\right\}=Sin((\nu+\lambda)\pi)C_\nu^\lambda(z)-Sin(\lambda\pi)C_\nu^\lambda(-z)$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\{Sin((\nu+\lambda)\pi)-Sin(\nu\pi)Cos(\lambda\pi)\}C_\nu^\lambda(z)-Sin(\lambda\pi)C_\nu^\lambda(-z)$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)\Rightarrow C_\nu^\lambda(-z)=Cos(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)-\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)$$

$$(1)\Rightarrow\frac{\pi}{2}\{Sin((\nu+2\lambda)\pi)-Cos(\lambda\pi)Sin((\nu+\lambda)\pi)\}C_\nu^\lambda(z)=$$

$$=\left\{Sin(\lambda\pi)Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)+\frac{\pi\ Cos(\lambda\pi)Sin(\lambda\pi)}{2}C_\nu^\lambda(-z)\right\}+Sin((\nu+\lambda)\pi)Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\{Cos((\nu+\lambda)\pi)\}C_\nu^\lambda(z)=\left\{Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)+\frac{\pi\ Cos(\lambda\pi)}{2}C_\nu^\lambda(-z)\right\}+Sin((\nu+\lambda)\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\{Cos((\nu+\lambda)\pi)-Cos(\lambda\pi)Cos(\nu\pi)\}C_\nu^\lambda(z)=Sin(\lambda\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)+\{Sin((\nu+\lambda)\pi)-Cos(\lambda\pi)Sin(\nu\pi)\}C_{(Q),\nu}^\lambda(z)$$

$$\Rightarrow-\frac{\pi}{2}Sin(\nu\pi)C_\nu^\lambda(z)=Cos(\nu\pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)+C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)$$

Comme les formules de liaison des fonctions de Gegenbauer se déduisent des formules de liaison des fonctions de Legendre associées, on a :

$$C_\nu^\lambda(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{Cos(\nu\ \pi)C_{(Q),\nu}^\lambda(z)+C_{(Q),\nu}^\lambda(-z)}{Sin(\nu\ \pi)}\qquad C_{(Q),\nu}^\lambda(z)=\frac{\pi}{2}\frac{Cos(\nu\ \pi)C_\nu^\lambda(z)-C_\nu^\lambda(-z)}{Sin(\nu\ \pi)}$$

Ce qui correspond à notre résultat.

Une autre relation fonctionnelle existe avec les fonctions de Gegenbauer peut être établie avec les ordres inverses des fonctions de Jacobi, pour le paramètre de valeur entières, on a :

$$\begin{cases} P_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} P_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \\ Q_{\nu+\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} Q_{\nu-\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{\nu}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} P_{\nu-2\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \\ Q_{\nu}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} Q_{\nu-2\beta}^{(\beta,\beta)}(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} P_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z) \\ Q_{\nu+2\beta}^{(-\beta,-\beta)}(z) = 2^{-2\beta}(-1)^{\beta}(1-z^2)^{\beta} Q_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z) \end{cases}$$

Appliquons ceci à l'expression des fonctions de Gegenbauer, il vient :

$$\left\{ C_{\nu}^{\lambda}(z) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z) \quad C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z) = 2^{2\lambda-1}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}(1-z^2)^{\frac{1-2\lambda}{2}} Q_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z) \right.$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}-\lambda \Rightarrow C_{\nu}^{\lambda}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} 2^{2\lambda-1}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} P_{\nu+2\lambda-1}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}-\lambda\right)}(z) \\ \beta = \lambda-\frac{1}{2} \Rightarrow C_{(Q),\nu}^{\lambda}(z) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} Q_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(z) \end{cases}$$

Une autre relation fonctionnelle existe avec les fonctions de Gegenbauer de première espèce, à l'aide d'une transformation quadratique :

$$P_{\nu}^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(z) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{1}{2}\right)} C_{2\nu}^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right) \Leftrightarrow C_{2\nu}^{\lambda}(z) = \frac{\Gamma(\lambda+\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} P_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(2z^2-1)$$

$$P_{\nu}^{\left(\alpha,+\frac{1}{2}\right)}(z) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{z+1}{2}}} C_{2\nu+1}^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right) \Leftrightarrow C_{2\nu+1}^{\lambda}(z) = z\frac{\Gamma(\lambda+\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} P_{\nu}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)}(2z^2-1)$$

<u>Résumé des liens entres fonctions de Jacobi et fonctions de Legendre associés établi au cours des calculs antérieurs</u>

Les principaux liens utiles entres les fonctions de Jacobi et fonctions de Legendre associées sont donc les suivants :

$$P_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z) = 2^{\beta}(1-z^2)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)} P_{\nu+\beta}^{-\beta}(z) \quad Q_{\nu}^{(\beta,\beta)}(z) = 2^{\beta}(1-z^2)^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+2\beta+1)} Q_{\nu+\beta}^{\beta}(z)$$

$$P_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}} P_{\nu}^{\beta}(z) \quad Q_{\nu}^{(-\beta,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\beta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\beta}{2}}\left\{\frac{\pi}{2} Sin(\beta\,\pi) P_{\nu}^{\beta}(z) + Cos(\beta\,\pi) Q_{\nu}^{\beta}(z)\right\}$$

.

Liens avec les polynômes de Tchebycheff

Les polynômes de Tchebycheff de première, deuxième, troisième et quatrième espèce comme des cas particuliers sont liés aux polynômes de Jacobi :

$$T_\nu(z) = Cos(\nu\ ArcCos(z)) = \frac{P_\nu^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(z)}{P_\nu^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(1)} = \frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} P_\nu^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(z)$$

$$U_\nu(z) = \frac{Sin((\nu+1)ArcCos(z))}{Sin(ArcCos(z))} = (\nu+1)\frac{P_\nu^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(z)}{P_\nu^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(1)} = \frac{\Gamma(\nu+2)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} P_\nu^{\left(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)}(z)$$

$$T_{2\nu+1}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} zP_\nu^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(2z^2-1) \quad U_{2\nu}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} zP_\nu^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(2z^2-1)$$

$$V_\nu(z) = \frac{Sin\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)ArcCos(z)\right)}{Sin\left(\frac{ArcCos(z)}{2}\right)} = (2\nu+1)\frac{P_\nu^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(z)}{P_\nu^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(1)} \quad W_n(z) = \frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)ArcCos(z)\right)}{Cos\left(\frac{ArcCos(z)}{2}\right)} = \frac{P_\nu^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(z)}{P_\nu^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(1)}$$

Avec les polynômes de Laguerre et de Hermite

Par passage à la limite les polynômes de Laguerre et de Hermite sont également liés aux polynômes de Jacobi :

$$L_\nu^\alpha(z) = \underset{\beta\to\infty}{Lim}\, P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2z}{\beta}\right) \qquad L_\nu^\beta(z) = (-1)^\nu \underset{\alpha\to\infty}{Lim}\, P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2z}{\alpha}-1\right)$$

$$H_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)\underset{\lambda\to\infty}{Lim}\,\lambda^{-\frac{\nu}{2}} C_\nu^\lambda\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Gamma(\nu+1)\underset{\lambda\to\infty}{Lim}\,\lambda^{-\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma(2\lambda)} P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$De\ plus\ \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda+b)} \approx \lambda^{a-b} \Rightarrow \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma(2\lambda)} \approx \lambda^{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}(2\lambda)^\nu \approx 2^\nu$$

$$\Rightarrow H_\nu(z) = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\underset{\lambda\to\infty}{Lim}\,\lambda^{-\frac{\nu}{2}} P_\nu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Formule de récurrence sur les degrés des polynômes/fonctions de Jacobi et des dérivées paramétriques des polynômes de Jacobi

Les fonctions de Jacobi présentent une formule de récurrence sur les degrés :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(\alpha+\beta+2\nu-1)\left(\alpha^2-\beta^2+z(\alpha+\beta+2\nu-2)(\alpha+\beta+2\nu)\right)P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{2\nu(\alpha+\beta+\nu)(\alpha+\beta+2\nu-2)}-\\-\dfrac{(\alpha+\nu-1)(\beta+\nu-1)(\alpha+\beta+2\nu)P_{\nu-2}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\nu(\alpha+\beta+\nu)(\alpha+\beta+2\nu-2)}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(\alpha+\beta+2\nu+1)\left(\alpha^2-\beta^2+z(\alpha+\beta+2\nu)(\alpha+\beta+2\nu+2)\right)P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)}-\\-\dfrac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\alpha+\beta+2\nu+2)P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)=\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta+2\nu+1)\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2+\\+z(\alpha+\beta+2\nu)(\alpha+\beta+2\nu+2)\end{pmatrix}P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)-\\-2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\alpha+\beta+2\nu+2)P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\end{array}\right\}$$

La dérivation terme à terme sur le degré v, donne la relation de récurrence sur les dérivées paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l}2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}+\\+2P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)\{(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)+(\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)+2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)\}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta+2\nu+1)\left(\alpha^2-\beta^2+z(\alpha+\beta+2\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\right)\frac{\partial P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\\-2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}+\\+2P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)\left(\alpha^2-\beta^2+2z(1+\alpha+\beta+2\nu)^2+z(\alpha+\beta+2\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\right)-\\-2P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\left(2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)+(\alpha+\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)+(\beta+\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\right)\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}+\\+2P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)\left((2+\alpha+\beta+3\nu)^2-(\nu+1)(3\nu+1)-1\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha+\beta+2\nu)\left(\alpha^2-\beta^2+z\left((1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\right)\right)\frac{\partial P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\\-2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}+\\+2P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)\left(\alpha^2-\beta^2+z\{3(1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\}\right)-\\-2P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\left(2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)+(1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\right)\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$2(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu+1)(\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha+\beta+2\nu)\left(\alpha^2-\beta^2+z\left((1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\right)\right)\frac{\partial P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\\-2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(2+\alpha+\beta+2\nu)\frac{\partial P_{\nu-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\\-2P_{\nu+1}^{(\alpha,\beta)}(z)\left((2+\alpha+\beta+3\nu)^2-(\nu+1)(3\nu+1)-1\right)+\\+2P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(z)\left(\alpha^2-\beta^2+z\left(3(1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\right)\right)-\\-2P_{\nu-1}^{\alpha,\beta}(z)\left(2(\alpha+\nu)(\beta+\nu)+(1+\alpha+\beta+2\nu)^2-1\right)\end{array}\right\}$$

.

Formule de récurrence sur les ordres des polynômes/fonctions de Jacobi et des dérivées paramétriques des polynômes de Jacobi

Les polynômes/fonctions de Jacobi présentent une formule de récurrence sur les ordres α et β:

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\alpha(z-3)+\beta(z-1)+2(\nu(z-1)+1)}{(\alpha+\beta+\nu)(z-1)}P_\nu^{(\alpha-1,\beta)}(z)-\frac{2(\alpha+\nu-1)}{(\alpha+\beta+\nu)(z-1)}P_\nu^{(\alpha-2,\beta)}(z)$$

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\alpha(z+1)+\beta(z+3)+2(\nu(z+1)-1)}{(\alpha+\beta+\nu)(z+1)}P_\nu^{(\alpha,\beta-1)}(z)-\frac{2(\beta+\nu-1)}{(\alpha+\beta+\nu)(z+1)}P_\nu^{(\alpha,\beta-2)}(z).$$

La dérivation terme amène également à considérer les relations de récurrence sur les dérivées premières paramétriques en ν :

$$(\alpha+\beta+\nu)(z-1)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=(\alpha(z-3)+\beta(z-1)+2(\nu(z-1)+1))P_\nu^{(\alpha-1,\beta)}(z)-2(\alpha+\nu-1)P_\nu^{(\alpha-2,\beta)}(z)$$

$$\Rightarrow(z-1)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+(\alpha+\beta+\nu)(z-1)\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}2(z-1)P_\nu^{(\alpha-1,\beta)}(z)+\\(\alpha(z-3)+\beta(z-1)+2(\nu(z-1)+1))\frac{\partial P_\nu^{(\alpha-1,\beta)}(z)}{\partial\nu}-\\-2P_\nu^{(\alpha-2,\beta)}(z)-2(\alpha+\nu-1)\frac{\partial P_\nu^{(\alpha-2,\beta)}(z)}{\partial\nu}\end{array}\right\}$$

$$(\alpha+\beta+\nu)(z+1)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=(\alpha(z+1)+\beta(z+3)+2(\nu(z+1)-1))P_\nu^{(\alpha,\beta-1)}(z)-2(\beta+\nu-1)P_\nu^{(\alpha,\beta-2)}(z)$$

$$\Rightarrow(z+1)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+(\alpha+\beta+\nu)(z+1)\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}2(z+1)P_\nu^{(\alpha,\beta-1)}(z)+\\(\alpha(z+1)+\beta(z+3)+2(\nu(z+1)-1))\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta-1)}(z)}{\partial\nu}-\\-2P_\nu^{(\alpha,\beta-2)}(z)-2(\beta+\nu-1)\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta-2)}(z)}{\partial\nu}\end{array}\right\}$$

<u>Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Jacobi</u>

L'idée est partir du développement connu des polynômes/fonctions de Jacobi en fonctions hypergéométriques, sachant que l'utilisation de la deuxième expression n'a pas de sens car elle n'est valable que pour des degrés entiers :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(-\nu, \nu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Sachant que la dérivée du symbole de Pochhammer est la suivante :

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = \frac{\Gamma'(\alpha+\mathrm{k})\Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha+\mathrm{k})\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} = \frac{\Gamma'(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\alpha)_k}{d\alpha} = (\alpha)_k[\psi(\alpha+k) - \psi(\alpha)]$$

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+k\text{-}1) = \frac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(\alpha)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* ; $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

.

La dérivation terme à terme de la première expression donne :

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k(k!)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \qquad \textit{Dérivation terme à terme} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!}\begin{pmatrix}\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\\+\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)\end{pmatrix}\times\\ \times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right\}+\\ +\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\{\psi(\nu+\alpha+1)-\psi(\nu+1)\}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty}\dfrac{(-\nu)_k(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right\}$$

De plus $\psi(-\nu)-\psi(k-\nu)=\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\Rightarrow$

$$\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+\alpha+1)-\psi(\nu+1)\}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+\\ +\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1+k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1+k)k!}\times\\ \times(\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1))\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+\alpha+1)-\psi(\nu+1)\}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+\\ +\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\times\\ \times\begin{pmatrix}\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\\+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\end{pmatrix}\times\\ \times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}\\ \textit{ou bien}\\ \dfrac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial \nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+\alpha+1)-\psi(\nu+1)\}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)-\\ -\dfrac{Sin(\pi\nu)\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\pi\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\times\\ \times\begin{pmatrix}\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\\+\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\end{pmatrix}\times\\ \times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

Cette formule n'est pas commode à utiliser lorsque les degrés sont des entiers. Elle n'est d'ailleurs pas définie car les fonctions Gamma divergent aux pôles de l'expression. Mais on peut lever l'incertitude de l'expression par un passage à la limite comme on va le voir par la suite.

Levée de l'incertitude aux pôles de la fonction Gamma pour les dérivées premières par rapport au degré, pour les fonctions de Jacobi de degré entier et d'ordres quelconques

Dans la suite de l'étude on considère que les deux paramètres α et β sont positifs. Dans ce cas la seule singularité de la fonction apparaît dans les termes Γ(-ν) et Γ(k-ν), comme suit :

$$\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(\nu+\alpha+1)-\psi(\nu+1)\}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)+\\ +\dfrac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\times\\ \times\left(\begin{array}{l}\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\psi(\nu+1)\\ -\psi(\nu-k+1)\end{array}\right)\times\\ \times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\left\{\begin{array}{l}\{\psi(n+\alpha+1)-\psi(n+1)\}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)+\\ +\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\mathop{Lim}_{\nu\to n}\dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\times\left(\begin{array}{l}\psi(k+\nu+\alpha+\beta+1)-\\ -\psi(\nu+\alpha+\beta+1)+\\ +\psi(\nu+1)-\psi(\nu-k+1)\end{array}\right)\times\\ \times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\{\psi(n+\alpha+1)-\psi(n+1)\}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)+$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}(\psi(k+n+\alpha+\beta+1)-\psi(n+\alpha+\beta+1)+\psi(n+1)-\psi(n-k+1))\\ \times\mathop{Lim}_{\nu\to n}\dfrac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right]-\\ -\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\left[\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1+k)(k-n-1)!}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\left\{\mathop{Lim}_{\nu\to n}\dfrac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}\right\}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\right]\end{array}\right\}$$

$$Comme\qquad \mathop{Lim}_{\nu\to n}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^k\,\frac{n!}{(n-k)!}\quad \mathop{Lim}_{\nu\to n}\frac{\psi(\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu)}=(-1)^n n!$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\{\psi(n+\alpha+1)-\psi(n+1)\}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)+$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\left[(-1)^k\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k!(n-k)!}\left(\begin{array}{l}\psi(k+n+\alpha+\beta+1)-\psi(n+\alpha+\beta+1)+\\ +\psi(n+1)-\psi(n-k+1)\end{array}\right)\times\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\right]-\\ -(-1)^n\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=\infty}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1+k)(k-n-1)!}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^k\end{array}\right\}$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Jacobi, valeur au degré 0

En appliquant l'expression obtenue par la levée l'incertitude dans le calcul précédent, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(\alpha+1)-\psi(1)\}P_0^{(\alpha,\beta)}(z) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+k)(k-1)!}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0} = \{\psi(\alpha+1)-\psi(1)\} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+k)}{k\,\Gamma(\alpha+1+k)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Expression formelle des dérivées paramétriques selon le degré pour les fonctions/polynômes de Jacobi, valeur au degré 1

De la même façon pour v=1, il vient :

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \{\psi(\alpha+2)-\psi(2)\}P_1^{(\alpha,\beta)}(z) + \left\{\begin{array}{l} -\frac{\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\left\{(\psi(\alpha+\beta+3)-\psi(\alpha+\beta+2)+\psi(2)-\psi(1))\times\frac{1-z}{2}\right\}+ \\ +\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2+k)(k-2)!}{\Gamma(\alpha+1+k)k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \end{array}\right\}$$

Et en développant finalement le calcul le résultat suivant :

$$\psi(\alpha+\beta+3)-\psi(\alpha+\beta+2) = \frac{1}{\alpha+\beta+2} \qquad \psi(2)-\psi(1)=1$$

$$\Rightarrow \psi(\alpha+\beta+3)-\psi(\alpha+\beta+2)+\psi(2)-\psi(1) = \frac{1}{\alpha+\beta+2}+1 = \frac{\alpha+\beta+3}{\alpha+\beta+2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left[\begin{array}{l} \{\psi(2+\alpha)-\psi(2)\}P_1^{(\alpha,\beta)}(z)+ \\ \left\{-\frac{\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\left(\frac{\alpha+\beta+3}{\alpha+\beta+2}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)+\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\} \end{array}\right]$$

$$\left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\{\psi(2+\alpha)-\psi(2)\}P_1^{(\alpha,\beta)}(z) - \left(\frac{\alpha+\beta+3}{2}\right)(1-z) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\sum_{k=2}^{k=\infty}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)k(k-1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\right]\right\} \Leftarrow k=l+2$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=1} = \left\{\{\psi(2+\alpha)-\psi(2)\}P_1^{(\alpha,\beta)}(z) - (\alpha+\beta+3)\left(\frac{1-z}{2}\right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+4+l)}{\Gamma(\alpha+l+3)(l+1)(l+2)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l\right]\right\}$$